Απειροστικός Λογισμός

Ι. Μυριτζής

2008

Περιεχόμενα

1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ. ΟΙ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ 5

1.1 Σύνολα . . . 6

1.2 Απεικονίσεις. Ισχύς συνόλου . . . 8

1.3 Βασικές έννοιες και θεωρήματα . . . 9

1.3.1 Όριο συνάρτησης όταν $t \to a$ . . . 9

1.3.2 Όριο συνάρτησης όταν $t \to \infty$ . . . 9

1.3.3 Συνεχής συνάρτηση . . . 9

1.3.4 Παράγωγος μιάς συνάρτησης . . . 10

1.3.5 Ακολουθίες . . . 11

1.4 Αντίστροφη συνάρτηση . . . 14

1.4.1 Αντίστροφες τριγωνομετρικών συναρτήσεων . . . 15

1.4.2 Εκθετική και λογαριθμική συνάρτηση . . . 18

1.4.3 Υπερβολικές συναρτήσεις . . . 19

1.5 Σχόλια για τα ακρότατα μιας συνάρτησης . . . 21

1.6 Ασκήσεις . . . 22

2 ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ 25

2.1 Ολοκλήρωμα Riemann . . . 25

2.1.1 Ιδιότητες του ολοκληρώματος . . . 27

2.1.2 Θεώρημα μέσης τιμής . . . 28

2.2 Το Θεμελειώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού . . . 28

2.3 Μέθοδοι ολοκλήρωσης . . . 30

2.3.1 Διαφορικό μιας συνάρτησης . . . 30

2.3.2 Μέθοδος αντικατάστασης . . . 30

2.3.3 Ολοκλήρωση κατά παράγοντες . . . 31

2.3.4 Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων . . . 32

2.3.5 Ολοκληρώματα που περιέχουν $\sqrt{a^2 - x^2}$ . . . 33

2.3.6 Ολοκληρώματα που περιέχουν $\sqrt{x^2+a^2}$, $\sqrt{x^2-a^2}$ 33
2.3.7 Ολοκληρώματα γινομένων $\cos ax$, $\sin bx$ 34
2.3.8 Αναγωγικοί τύποι 34
2.4 Γενικευμένα ολοκληρώματα 35
2.5 Παραγώγιση ολοκληρωμάτων 38
2.6 Ασκήσεις 39

3 ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ 41

3.1 Το Θεώρημα Taylor 42
3.2 Σειρές 46
3.3 Δυναμοσειρές και σειρές Taylor 50
3.4 Εφαρμογές στη Φυσική. 54

4 ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ 57

4.1 Ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}^3$ 57
4.2 Εσωτερικό γινόμενο 58
4.3 Εξωτερικό γινόμενο 62
4.4 Ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}^n$ 64
4.5 Διανυσματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής 66
4.6 Πίνακες, Γραμμικά Συστήματα, Ορίζουσες 69
4.7 Ασκήσεις 75
4.8 Μιγαδικοί αριθμοί 77

5 ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 81

5.1 Εισαγωγή στις Διαφορικές Εξισώσεις 82
5.2 Ύπαρξη λύσεων και μοναδικότητα 83
5.3 Διαφορικές εξισώσεις που λύνονται με ολοκλήρωση 85
5.4 Διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης 89

6 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ 95

6.1 Υπολογισμός εμβαδών 96
6.2 Μήκος καμπύλης 96
6.3 Όγκος και επιφάνεια από περιστροφή 97
6.4 Το ορισμένο ολοκλήρωμα ως μέση τιμή 99
6.5 Ελλειπτικό ολοκλήρωμα 99

Κεφάλαιο 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ. ΟΙ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Οι προτάσεις που χρησιμοποιούμε στα μαθηματικά είναι τριών τύπων: ορισμοί, αξιώματα και θεωρήματα.

Α. Ορισμός είναι μια πρόταση που εισάγει μια νέα έννοια χρησιμοποιώντας παλαιότερες και "γνωστές" ήδη έννοιες. Για παράδειγμα η ταχύτητα στην ομαλή κίνηση ορίζεται χρησιμοποιώντας τις έννοιες: διάστημα (ή μετατόπιση), χρονική διάρκεια, πηλίκο.

Β. Αξίωμα είναι μια πρόταση την αλήθεια της οποίας δεχόμαστε χωρίς απόδειξη. Συνήθως τα αξιώματα περιγράφουν τις σχέσεις των πρωταρχικών εννοιών, των εννοιών δηλαδή που δεν ορίζονται βάσει παλαιοτέρων και "απλουστέρων" εννοιών. Για παράδειγμα, στη γεωμετρία πρωταρχικές έννοιες θεωρούνται οι έννοιες των σημείων, ευθειών και επιπέδων. Έτσι το γνωστό αξίωμα "από δυο διαφορετικά σημεία διέρχεται μία μόνο ευθεία", ουσιωδώς περιγράφει ιδιότητες πρωταρχικών εννοιών.

Γ. Θεώρημα είναι μια πρόταση της οποίας η αλήθεια προκύπτει με λογική διεργασία (απόδειξη) προηγουμένων αληθών προτάσεων. Με την συνεχή απόδειξη θεωρημάτων κάθε μαθηματικός κλάδος εμπλουτίζεται με αληθείς προτάσεις που βασίζονται σε λίγα αξιώματα και ορισμούς.

Στη Φυσική, οι προτάσεις που χρησιμοποιούμε είναι τριών τύπων: ορισμοί, νόμοι και θεωρήματα. Νόμος είναι μια πρόταση της οποίας η αλήθεια έχει προκύψει από παρατήρηση. Πχ "κάθε σώμα που αφήνεται ελεύθερο κοντά στην επιφάνεια της γης πέφτει κατακόρυφα" είναι μια πρόταση που δεν αποδεικνύεται, απλώς είναι κάτι που μας το λέει η φύση. Οι περισσότεροι νόμοι έχουν μαθηματική διατύπωση, πχ ο θεμελιώδης νόμος της Μηχανικής γράφεται ως "δύναμη = μάζα×επιτάχυνση" και, επαναλαμβάνουμε, δεν αποδεικνύεται αλλά ανακαλύπτεται.

Η μαθηματική γλώσσα χαρακτηρίζεται ως αυστηρή. Αυτό σημαίνει ότι σε μια μαθηματική πρόταση δεν υπάρχει ποτέ ασάφεια. Για να επιτευχθεί αυτό είναι απαραίτητο οι έννοιες που χρησιμοποιούμε να είναι επακριβώς καθορισμένες και να έχουν μοναδική σημασία. Στην καθημερινή γλώσσα αυτό δεν είναι πάντα εφικτό, πχ η λέξη "αέρας" μπορεί να δηλώνει άνεμο ή την ατμόσφαιρα. Αντίθετα στα μαθηματικά η λέξη πχ "χώρος" δεν σημαίνει περιοχή, τοποθεσία ή ευρυχωρία, αλλά είναι απλή συντομογραφία για το "διανυσματικός χώρος" που ορίζεται επακριβώς μέσω δέκα αξιωμάτων.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι για όλες τις επιστήμες η ταυτοποίηση των εννοιών είναι διεργασία κεφαλαιώδους σημασίας. Έτσι καταλαβαίνουμε ότι η χρήση της λέξης "αέρας" αντί "άνεμος" μπορεί να καταστήσει μια πρόταση ασαφή και η επανάληψη τέτοιων ασαφειών έχει καταστροφικό αποτέλεσμα στο κείμενο. Στα μαθηματικά διευκολυνόμαστε ιδιαίτερα από την χρήση της γλώσσας των συνόλων. Πχ η αρχή της του τρίτου αποκλείσεως του Αριστοτέλη (παν ή είναι τι ή δεν είναι) συνήθως ικανοποιείται από την σχέση του περιέχεσθαι, $x \in A$. Αν x ανήκει στο A, τότε προφανώς δεν ανήκει στο συμπλήρωμα του A.

Η δεύτερη κατηγορία λογικών σφαλμάτων προέρχεται από μη επιτρεπτές πράξεις. Για παράδειγμα, δεν μπορούμε να προσθέσουμε στο διάνυσμα (x, y) του διδιάστατου χώρου $\mathbb{R}^2$ το διάνυσμα (x, y, z) του τριδιάστου χώρου $\mathbb{R}^3$. Όμοια δεν μπορούμε να προσθέτουμε διανύσματα σε αριθμούς (πχ $\mathbf{a} + \mathbf{a}.\mathbf{c}$). Χωρίς να φτάνουμε σε ακραία σχολαστικότητα, $5 + \sin t$ δεν είναι άθροισμα αριθμού και συνάρτησης (τι ακριβώς παριστάνει;)

Όλα τα μαθηματικά αντικείμενα ομαδοποιούνται σε σύνολα. Έτσι ένα διάνυσμα ανήκει στο σύνολο των διανυσμάτων του επιπέδου ή του τριδιάστατου χώρου, μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ανήκει στο σύνολο π.χ. των συνεχών ή των παραγωγισίμων συναρτήσεων που ορίζονται σε κάποιο διάστημα. Κατά τη στοιχειώδη λογική επιτρέπεται η σύγκριση στοιχείων του ίδιου συνόλου, κάτι ανάλογο με αυτό που μας έλεγαν στο Δημοτικό ότι συγκρίνουμε μόνο ομοειδή πράγματα. Ομοίως πραγματοποιούμε μόνο επιτρεπτές πράξεις.

1.1 Σύνολα

Στη συνέχεια επαναλαμβάνουμε με συντομία όσα από τη γλώσσα των συνόλων είναι απαραίτητα. Όλα τα σύνολα θα θεωρούνται ότι περιέχουν στοιχεία ενός "μητρικού" συνόλου X.

Ένα σύνολο προσδιορίζεται είτε δι' αναγραφής των στοιχείων του, πχ

$$A = \{2, 4, 6, 8\},$$

είτε δια περιγραφής, πχ A είναι το σύνολο των μονοψήφιων αρτίων ακεραίων, ή

$$A = \{n \in \mathbb{Z} : n = 2k,\ k = 1, 2, 3, 4\}.$$

Προφανώς δεν μπορούμε να αναγράψουμε όλα τα στοιχεία των απειροσυνόλων, οπότε χρησιμοποιούμε τη μέθοδο της περιγραφής, πχ

$$B = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Μια απλουστευτική πρακτική είναι η γραφή τριών τελειών ... πχ

$$B = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = \frac{1}{n},\ n = 1, 2, ... \right\},$$

ή ακόμα

$$B = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ... \right\}.$$

Επισημαίνουμε ότι ... είναι μαθηματικό σύμβολο.

Ισότητα συνόλων. *Δύο σύνολα A και B είναι ίσα αν περιέχουν ακριβως τα ίδια στοιχεία,* συμβολικά,

$$A = B \Leftrightarrow x \in A \Rightarrow x \in B \quad \text{και} \quad x \in B \Rightarrow x \in A.$$

Το A είναι υποσύνολο του B αν κάθε στοιχείο του A είναι και στοιχειο του B, συμβολικά,

$$A \subseteq B \Leftrightarrow x \in A \Rightarrow x \in B.$$

Πράξεις μεταξύ συνόλων. *Τομή δυο συνόλων A και B είναι ένα τρίτο σύνολο που έχει ως στοιχεία του τα κοινά στοιχεία των δυο συνόλων A και B*, συμβολικά

$$A \cap B = \{ x \in X : x \in A \text{ και } x \in B \}.$$

Ένωση δυο συνόλων A και B είναι ένα τρίτο σύνολο που έχει ως στοιχεία του όλα τα στοιχεία των δυο συνόλων A και B, συμβολικά

$$A \cup B = \{ x \in X : x \in A \ \text{ ή } x \in B \}.$$

Ποιές είναι οι ιδιότητες των πράξεων;

Συμπληρωματικό ενός συνόλου. *Έστω ένα σύνολο X και A ένα υποσύνολο του. Τότε το συμπλήρωμα A^c του A (ως προς το X) ορίζεται ως* $A^c = \{ x \in X : x \notin A \}$. Παράδειγμα: το συμπληρωματικό του ανοικτού διαστήματος (a, b) στο $\mathbb{R}$, είναι το σύνολο $(-\infty, a] \cup [b, +\infty)$. Αν $\emptyset$ είναι το κενό σύνολο, τότε $\emptyset^c = X, \quad X^c = \emptyset$.

Γινόμενο συνόλων. Καρτεσιανό γινόμενο *δυο συνόλων A και B είναι ένα τρίτο σύνολο που έχει ως στοιχεία του όλα τα διατεταγμένα ζεύγη στοιχείων των δυο συνόλων A και B*, συμβολικά

$$A \times B = \{ (a, b) : a \in A \text{ και } b \in B \}.$$

Παράδειγμα: $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{ (x, y) : x, y \in \mathbb{R} \}$ είναι το επίπεδο, και $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{ (x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R} \}$ είναι ο τριδιάστατος Ευκλείδιος χώρος.

1.2 Απεικονίσεις. Ισχύς συνόλου

Έστω δύο σύνολα X και Y. *Μια συνάρτηση συσχετίζει κάθε στοιχείο του X με ένα στοιχείο του Y. Αντί να λέμε ότι f είναι μια συνάρτηση από το X στο Y, γράφουμε με σύμβολα $f : X \to Y$.* Χρησιμοποιούνται ακόμα οι όροι, *απεικόνιση, μετασχηματισμός, τελεστής.*

Όπως βλέπουμε, μια απεικόνιση είναι μια τριάδα που περιλαμβάνει το σύνολο αφετηρίας X (domain), το σύνολο αφίξεως Y (range) και τον κανόνα της αντιστοίχησης f. *Το σύνολο των $y \in Y$ για τα οποία $f(x) = y$ για όλα τα $x \in X$, λέγεται εικόνα (image) του X στο Y και συμβολίζεται $f(X)$. Αν η εικόνα του X είναι ολόκληρο το Y, τότε η απεικόνιση λέγεται επί (onto). Αν για κάθε $x, y \in X$ με $x \neq y$ ισχύει $f(x) \neq f(y)$, τότε η συνάρτηση λέγεται ένα προς ένα.* Αν μια συνάρτηση είναι ένα προς ένα και επί (*αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση*), τότε ορίζεται η *αντίστροφη συνάρτηση* $f^{-1} : Y \to X$.

Αποδείξτε τις παρακάτω ιδιότητες.

- Για $A, B \subseteq X$ ισχύει $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$, $\quad f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$
- Για $A, B \subseteq Y$ ισχύει $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$, $\quad f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

Δύο σύνολα A και B λέγονται ισοδύναμα αν περιέχουν τον ίδιο αριθμό στοιχείων, πχ $A = \{1, 2, 3\}$ και $B = \{a, b, A\}$ είναι ισοδύναμα. Ο ορισμός αυτός είναι ικανοποιητικός για πεπερασμένα σύνολα, αλλά για απειροσύνολα η μαθηματική κοινότητα έπρεπε να περιμένει μέχρι το τέλος του 19ου αιώνα, όταν ο Cantor έδωσε τον εξής ορισμό. *Δύο σύνολα A και B λέγονται ισοδύναμα αν υπάρχει ένα προς ένα και επί αντιστοιχία μεταξύ τους.*

Με τον ορισμό αυτό, το σύνολο των φυσικών αριθμών και το σύνολο των φυσικών αρτίων είναι ισοδύναμα (περιέχουν τον "ίδιο αριθμό" στοιχείων, έχουν την ίδια ισχύ):

$$1, 2, 3, ...$$
$$2, 4, 6, ...$$

Σύνολα ισοδύναμα με το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$, λέγονται αριθμήσιμα σύνολα (countable sets). Έτσι, το σύνολο των ακεραίων $\mathbb{Z}$, το σύνολο των περιττών ακεραίων, το σύνολο των ακεραίων δυνάμεων του 2 είναι αριθμήσιμα σύνολα. Εντυπωσιακό είναι ότι το σύνολο των ρητών $\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο σύνολο. Το σύνολο των πραγματικών $\mathbb{R}$ είναι παράδειγμα μή αριθμήσιμου συνόλου.

1.3 Βασικές έννοιες και θεωρήματα

Υπενθυμίζουμε τις προαπαιτούμενες γνώσεις της μαθηματικής ανάλυσης. Η παρουσίαση δεν είναι λεπτομερής, απλώς συνοψίζουμε τους κυριώτερους ορισμούς και θεωρήματα χωρίς αποδείξεις.

1.3.1 Όριο συνάρτησης όταν $t \to a$

Λέμε ότι η πραγματική συνάρτηση f έχει όριο τον αριθμό m όταν $t \to a$, (γράφουμε $\lim\limits_{t \to a} f(t) = m$) αν

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \quad |t - a| < \delta \; \Rightarrow |f(t) - m| < \varepsilon.$$

Παράδειγμα. Η συνάρτηση f με τύπο $f(t) = 3t$ έχει όριο τον αριθμό 6 όταν $t \to 2$, διότι για δοθέν $\varepsilon > 0$, ο αριθμός $\delta = \varepsilon/3$ ικανοποιεί τον ορισμό. (Το ίδιο και ο αριθμός $\delta = \varepsilon/10$).

1.3.2 Όριο συνάρτησης όταν $t \to \infty$

Λέμε ότι η πραγματική συνάρτηση f έχει όριο τον αριθμό m όταν $t \to \infty$, (γράφουμε $\lim_{t \to \infty} f(t) = m$) αν

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists M > 0 : \; t > M \; \Rightarrow |f(t) - m| < \varepsilon.$$

Παράδειγμα. Η συνάρτηση f με τύπο $f(t) = 1/t^2$ έχει όριο τον αριθμό 0 όταν $t \to \infty$, διότι για δοθέν $\varepsilon > 0$, ο αριθμός $M = 1/\sqrt{\varepsilon}$ ικανοποιεί τον ορισμό. (Το ίδιο και ο αριθμός $M = 40/\sqrt{\varepsilon}$).

- Διατυπώστε τον αντίστοιχο ορισμό όταν $t \to -\infty$.

1.3.3 Συνεχής συνάρτηση

Λέμε ότι η πραγματική συνάρτηση

$$f : (a, b) \to \mathbb{R}$$

είναι *συνεχής* στο (a, b) αν για κάθε $y \in (a, b)$,

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \; |x - y| < \delta \; \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon, \quad x \in (a, b).$$

Διαισθητικά, η συνάρτηση f είναι συνεχής αν "κοντινά" πρότυπα απεικονίζονται μέσω της f σε "κοντινές" εικόνες.

Οι συνεχείς συναρτήσεις έχουν κάποιες καλές ιδιότητες που τις καθιστούν την αγαπημένη οικογένεια των μαθηματικών.

Σ1. Κάθε συνεχής συνάρτηση σε κλειστό και φραγμένο διάστημα έχει μέγιστο και ελάχιστο. Ακριβέστερα ισχύει:

Θεώρημα 1. *Αν $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής, τότε υπάρχει $t_0\in[a,b]:f(t)\leq f(t_0)$ για κάθε $t\in[a,b]$. Όμοια για την ελάχιστη τιμή.*

Σ2. Μια συνεχής συνάρτηση στο $[a,b]$ παίρνει όλες τις (ενδιάμεσες) τιμές μεταξύ $f(a)$ και $f(b)$. Ακριβέστερα ισχύει:

Θεώρημα 2. *Αν f είναι συνεχής στο $[a,b]$, τότε για κάθε y μεταξύ $f(a)$ και $f(b)$ υπάρχει $x\in[a,b]:f(x)=y$.*

Πόρισμα (θεώρημα *Bolzano*). *Αν f είναι συνεχής στο $[a,b]$ και $f(a)f(b)<0$, τότε υπάρχει $t\in(a,b):f(t)=0$.*

1.3.4 Παράγωγος μιάς συνάρτησης

Λέμε ότι η πραγματική συνάρτηση $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ είναι *παραγωγίσιμη* στο $t_0\in(a,b)$ αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{h\to0}\frac{f(t_0+h)-f(t)}{h}. \tag{1.3.1}$$

Τον αριθμό (1.3.1) ονομάζουμε παράγωγο της f στο t_0 και συμβολίζουμε με $f'(t_0)$. Αν η f παραγωγίζεται σε κάθε $t\in(a,b)$, τότε η παράγωγος συνάρτηση συμβολίζεται με πολλούς τρόπους, π.χ.

$$f'(t),\quad \text{ή}\quad \frac{df}{dt},\quad \text{ή}\quad \frac{df(t)}{dt},\quad \text{ή}\quad \frac{d}{dt}f(t),\quad \text{ή}\quad \dot{f}(t),\quad \text{ή}\quad Df(t).$$

Επισημαίνουμε με έμφαση ότι ο ορισμός της παραγώγου μπορεί να γραφεί με πολλούς (ισοδύναμους φυσικά) τρόπους, για παράδειγμα

$$y=f(x)\ \Rightarrow\ \frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},\qquad f'(t_0)=\lim_{t\to t_0}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}.$$

Το παρακάτω θεώρημα γενικεύει το θεώρημα *Rolle* :

Θεώρημα 3 (μέσης τιμής). *Αν f είναι παραγωγίσιμη στο $[a,b]$, τότε υπάρχει $c\in[a,b]$ τέτοιο ώστε*

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Ισοδύναμοι τρόποι γραφής είναι $f(b)=f(a)+f'(c)(b-a)$, ή συνηθέστερα

$$f(x+\Delta x)=f(x)+f'(\xi)\Delta x$$

με ξ μεταξύ x και $x + \Delta x$.

Υπενθυμίζουμε ότι η παράγωγος μιας συνάρτησης μας λέει αν η συνάρτηση είναι αύξουσα ή φθίνουσα.

Αν $f' > 0$ σε κάποιο διάστημα, τότε η f είναι αύξουσα στο διάστημα αυτό.

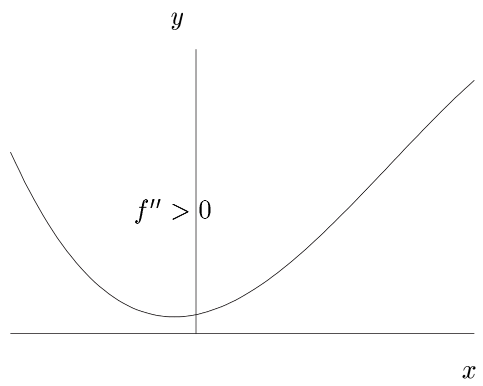
Αν $f' < 0$ σε κάποιο διάστημα, τότε η f είναι φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

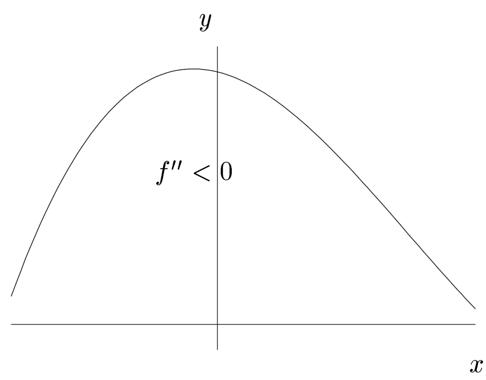
Κατά συνέπεια η δεύτερη παράγωγος f'' δείχνει αν f' είναι αύξουσα ή φθίνουσα. Άρα σε ένα διάστημα που

$f'' > 0$, σημαίνει ότι f' αυξάνει, άρα η f στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω.

$f'' < 0$, σημαίνει ότι f' φθίνει, άρα η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω.

Τυπικό παράδειγμα είναι η συνάρτηση τριώνυμο, $f(x) = ax^2 + bx + c$, που στρέφει τα κοίλα κάτω αν $a < 0$ και στρέφει τα κοίλα άνω αν $a > 0$.





1.3.5 Ακολουθίες

Ακολουθία πραγματικών αριθμών είναι μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$. Έχει καθιερωθεί να μη συμβολίζουμε τις συναρτήσεις αυτές με $x(n)$, $n \in \mathbb{N}$ αλλά με $\{x_n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Παραδείγματα είναι οι ακολουθίες με τύπο (n-οστό όρο)

$$x_n = n, \quad y_n = (-1)^n n, \quad z_n = 1/n, \quad a_n = \frac{2^n}{n!}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Οι έννοιες που γνωρίζουμε περί μονοτονίας, φραγμένου κλπ για τις συναρτήσεις, μεταφέρονται αβίαστα και στην περίπτωση των ακολουθιών. Ειδικά για το όριο ακολουθίας έχουμε τον παρακάτω ορισμό.

Μια ακολουθία $\{x_n\}$ *συγκλίνει στον αριθμό* a *(και γράφουμε* $x_n \to a$ *όταν* $n \to \infty$ *ή* $\lim_{n\to\infty} x_n = a$*) αν για κάθε* $\varepsilon > 0$ *υπάρχει φυσικός αριθμός* N *τέτοιος ώστε για κάθε* $n > N$ *να ισχύει* $|x_n - a| < \varepsilon$. Συμβολικά,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \text{αν} \quad \forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} : n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon.$$

Μπορούμε να δείξουμε για τις παραπάνω ακολουθίες $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}, \{a_n\}$, ότι η πρώτη απειρίζεται, η δεύτερη ταλαντεύεται η τρίτη και τέταρτη είναι μηδενικές (έχουν όριο το 0) καθώς $n \to \infty$. Οι γνωστές ιδιότητες των ορίων ισχύουν και για τα όρια ακολουθιών και δεν θα τις επαναλάβουμε. Π.χ. το όριο του αθροίσματος δυο συγκλινουσών ακολουθιών ισούται με το άθροισμα των ορίων,

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Υπενθυμίζουμε ότι η βασική τεχνική για να δείξουμε ότι μια συνάρτηση (άρα και ακολουθία) αποκλίνει, συνίσταται στη σύγκριση με γνωστή συνάρτηση:

Αν $\{a_n\}$ αποκλίνει (π.χ. $a_n \to +\infty$ όταν $n \to \infty$) και $b_n \geq a_n$ τελικώς για κάθε n, τότε και η $\{b_n\}$ τείνει στο $+\infty$.

Ως εφαρμογή του ορισμού θα δείξουμε την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση. *Αν $0 \leq a_n \leq b_n$ για κάθε n και $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, τότε $a_n \to 0$ καθώς $n \to \infty$.*

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή η $\{b_n\}$ είναι μηδενική, υπάρχει $N \in \mathbb{N} : n > N \Rightarrow |b_n| < \varepsilon$. Επειδή $a_n \leq b_n$, συμπεραίνουμε ότι για κάθε $n > N$ θα ισχύει και $a_n < \varepsilon$, οεδ.

Για να βρούμε το όριο μιας ακολουθίας $\{a_n\}$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την παρακάτω βασική πρόταση.

Σχηματίζουμε τη συνάρτηση f με τύπο $f(x)$ έτσι ώστε ο περιορισμός της στο $\mathbb{N}$ να ταυτίζεται με την $\{a_n\}$, δηλαδή $f(n) = a_n$ και εξετάζουμε κατά τα γνωστά το $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Για παράδειγμα αν $a_n = \sqrt{2n^2 - n}$, σχηματίζουμε τη συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \sqrt{2x^2 - x}$, και επειδή $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, συμπεραίνουμε ότι και $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$. Για εξάσκηση δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 - 2n}{4n^2 + n - 3} = \frac{3}{4}, \quad \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \omega^n = 0, \quad |\omega| < 1.$$

Εφ' όσον δεν υπάρχει αμφιβολία, για ελάφρυνση του συμβολισμού μπορούμε να παραλείπουμε το $n \to \infty$ κάτω από το σύμβολο $\lim$.

Ένα βασικό κριτήριο για τη σύγκλιση μιας ακολουθίας μας δίνει το παρακάτω θεώρημα που παραθέτουμε χωρίς απόδειξη.[1]

Θεώρημα 4. *Κάθε μονότονη και φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών συγκλίνει.*

[1] Η απόδειξη βασίζεται στην ιδιότητα του *supremum* των πραγματικών αριθμών. Όπως είναι γνωστό για τους πραγματικούς αριθμούς ισχύουν τα αλγεβρικά αξιώματα που χαρακτηρίζουν ένα διατεταγμένο σώμα. Η ιδιότητα του supremum είναι ένα ακόμα αξίωμα και διατυπώνεται ως εξής: *Κάθε μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο των πραγματικών αριθμών, έχει ελάχιστο άνω φράγμα (supremum).* Για παράδειγμα, το ανοικτό

Το περιεχόμενο του θεωρήματος γίνεται αντιληπτό με το εξής παράδειγμα. Ας θεωρήσουμε την ακολουθία με τύπο $a_n = 1 - 1/n$. Η ακολουθία αυτή είναι αύξουσα και άνω φραγμένη (π.χ. ένα άνω φράγμα της είναι ο αριθμός 3). Καθώς το n αυξάνει οι όροι της ακολουθίας πλησιάζουν τον αριθμό 1 (παρ΄ όλο που κανένας όρος της ακολουθίας δεν ισούται με 1). Σύμφωνα με το θεώρημα η ακολουθία συγκλίνει. Μπορούμε να μαντεύσουμε το όριο: είναι το ελάχιστο άνω φράγμα της ακολουθίας, δηλαδή ο αριθμός 1. Φυσικά θα μπορούσαμε αμέσως από τις ιδιότητες των ορίων να γράψουμε $\lim a_n = \lim(1 - 1/n) = \lim 1 - \lim(1/n) = 1 - 0 = 1$.

Όρια ακολουθιών που απαντώνται συχνά στις εφαρμογές είναι τα παρακάτω.

α) a^n/n συγκλίνει στο 0 αν $|a| \leq 1$ και αποκλίνει αν $|a| > 1$.

β) $a^n/n!$ συγκλίνει στο 0 για κάθε a.

γ) $\lim \sqrt[n]{a} = 1 \;\; \forall a > 1$.

Για τα παραπάνω όρια χρήσιμος είναι ο τύπος του *διωνυμικού θεωρήματος*,

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{1} a^{n-2} b^2 + ... + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n.$$

Υπενθυμίζουμε τον ορισμό του διωνυμικού συμβόλου

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \quad \text{και} \quad 0! = 1.$$

Από το διωνυμικό θεώρημα προκύπτουν οι ανισότητες (για $x \geq 0$)

$$(1+x)^n \geq 1 + nx, \qquad (1+x)^n \geq 1 + nx + \frac{n\,(n-1)}{2} x^2.$$

Στα παρακάτω παραδείγματα εξετάζουμε μερικές γνωστές ακολουθίες. Όλες οι αποδείξεις βασίζονται στις εξής δύο προτάσεις:

Π1. Αν $a_n \leq b_n$ *και* $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ *τότε* $b_n \to \infty$ *όταν* $n \to \infty$.

Π2. Αν $0 \leq a_n \leq b_n$ *και* $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ *τότε* $a_n \to 0$ *όταν* $n \to \infty$.

Παράδειγμα 1. a^n *συγκλίνει στο* 0 *αν* $|a| < 1$ *και αποκλίνει αν* $|a| > 1$. Πράγματι, έστω ότι $0 < a < 1$, οπότε θέτουμε $a = 1/\,(1+p)\,,\ p > 0$. Τότε, από το διωνυμικό θεώρημα έχουμε $(1+p)^n = 1 + np + ... + p^n \geq 1 + np$, επομένως

$$a^n = \frac{1}{(1+p)^n} = \frac{1}{1 + np + ... + p^n} \leq \frac{1}{1+np}.$$

διάστημα $(0,1)$ είναι άνω φραγμένο. Μερικά φράγματα του είναι οι αριθμοί $42, 8.34, 1, 2.25$ κλπ. Το ελάχιστο από τα άνω φράγματα του $(0,1)$ είναι προφανώς ο αριθμός 1. Το παράδειγμα αυτό φαίνεται τετριμμένο, αλλά το αξίωμα εξασφαλίζει την ύπαρξη του supremum και για σύνολα πραγματικών αριθμών (φραγμένα) που δεν είναι απλά διαστήματα ή πεπερασμένες ενώσεις διαστημάτων.

Αλλά $1/(1+np) \to 0$ όταν $n \to \infty$, άρα $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$. Αν τώρα είναι $a > 1$, θέτουμε $a = 1+p,\ p > 0$. Τότε, από το διωνυμικό θεώρημα έχουμε $a^n = (1+p)^n = 1+np+...+p^n \geq 1+np \to \infty$ όταν $n \to \infty$, άρα $\lim_{n\to\infty} a^n = \infty$. Η περίπτωση $a < 0$ αντιμετωπίζεται παρόμοια (πώς;).

Παράδειγμα 2. a^n/n *συγκλίνει στο* 0 *αν* $|a| < 1$ *και αποκλίνει αν* $|a| > 1$. Έστω πάλι ότι $a > 1$, θέτουμε $a = 1+p,\ p > 0$. Τότε, από το διωνυμικό θεώρημα έχουμε

$$\frac{a^n}{n} = \frac{(1+p)^n}{n} = \frac{1+np+...+p^n}{n} \geq \frac{1+np+\frac{n(n-1)}{2}p^2}{n} = \frac{1}{n} + (n-1)\frac{p^2}{2}$$

άρα $\lim_{n\to\infty} a^n = \infty$. Οι άλλες περιπτώσεις είναι παρόμοιες.

Παράδειγμα 3. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 0$ *για κάθε* $a \geq 0$. Υποθέτουμε πρώτα ότι $a \geq 1$, άρα και $a^{1/n} \geq 1$ για κάθε n. Θέτουμε $a^{1/n} = 1+p_n$, $p_n \geq 0$, οπότε από το διωνυμικό θεώρημα έχουμε $a = (1+p_n)^n \geq 1+np_n$. Λύνουμε ως προς p_n,

$$0 \leq p_n \leq \frac{a-1}{n},$$

άρα $p_n \to 0$ όταν $n \to \infty$, επομένως $\lim_{n\to\infty} a^{1/n} = \lim_{n\to\infty}(1+p_n) = 1$. Αν $0 < a < 1$, τότε $1/a > 1$, άρα

$$a^{1/n} = \frac{1}{\frac{1}{a^{1/n}}} \to 1$$

όταν $n \to \infty$.

Άσκηση. Αποδείξτε τα παραπάνω αποτελέσματα θεωρώντας τις συναρτήσεις με τύπους a^x, a^x/x, $a^{1/x}$ και παίρνοντας το όριο όταν $x \to \infty$.

Παράδειγμα 4. $a^n/n!$ *συγκλίνει πάντα στο* 0 *(για κάθε* $a \in \mathbb{R}$*)*. Υπόδειξη: Έστω $a > 0$ (η περίπτωση $a < 0$ είναι παρόμοια). Τότε υπάρχει $m \in \mathbb{N} : a < m$. Θεωρούμε $n > m$, οπότε

$$\begin{aligned}\frac{a^n}{n!} &= \frac{a^m}{m!}\frac{a}{m+1}\frac{a}{m+2}...\frac{a}{n} \leq \frac{a^m}{m!}\underbrace{\frac{a}{m}...\frac{a}{m}}_{n-m \text{ όροι}} = \frac{a^m}{m!}\left(\frac{a}{m}\right)^{n-m} = \\ &= \frac{a^m}{m!}\left(\frac{a}{m}\right)^{-m}\left(\frac{a}{m}\right)^n \equiv C\left(\frac{a}{m}\right)^n,\end{aligned}$$

και η ακολουθία $\left(\frac{a}{m}\right)^n$ είναι μηδενική διότι $\frac{a}{m} < 1$.

1.4 Αντίστροφη συνάρτηση

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο $[a,b]$ και γνησίως αύξουσα. Όπως γνωρίζουμε η εικόνα της f είναι ένα διάστημα $[\alpha,\beta] = [f(a), f(b)]$. Άρα αν δοθεί $\alpha < y < \beta$, τότε υπάρχει μοναδικό $a < x < b$ (γιατί;) τέτοιο ώστε $f(x) = y$. Κατά συνέπεια, επειδή ο αριθμός x καθορίζεται μονοσήμαντα από το y, μπορούμε να ορίσουμε τη συνάρτηση

$$f^{-1} : [\alpha, \beta] \to [a, b]$$

που λέγεται αντίστροφη συνάρτηση της f και ισχύει

$$f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y). \tag{1.4.1}$$

Παρόμοια ισχύουν για γνησίως φθίνουσες συναρτήσεις.

Παραδείγματα. **Α**. Έστω $y = f(x) = x^2$. Τότε $f'(x) = 2x > 0$, αν $x > 0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$. Η αντίστροφη της είναι η συνάρτηση τετραγωνική ρίζα, $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$, δηλαδή $y = x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{y}$, βλ (1.4.1).

Β. Έστω $y = f(x) = e^x$. Τότε $f'(x) = e^x > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, +\infty)$. Η αντίστροφη της είναι η συνάρτηση λογάριθμος, $f^{-1}(y) = \ln y$, δηλαδή $y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$, βλ (1.4.1).

Το παρακάτω σημαντικότατο θεώρημα μας επιτρέπει να βρούμε την παράγωγο της αντίστροφης συνάρτησης.

Θεώρημα 5. *Έστω f συνεχής στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο (a, b) με $f'(x) > 0$ στο διάστημα αυτό. Τότε η αντίστροφη συνάρτηση της f που ορίζεται στο $[\alpha, \beta]$, είναι διαφορίσιμη και ισχύει*

$$\left(f^{-1}(y)\right)' = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}, \quad \text{Συμβολικά,} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

Απόδειξη. Έστω κάποιο y_0 στο διάστημα (α, β) και ας θέσουμε $y_0 = f(x_0)$, $y = f(x)$. Τότε

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}.$$

Παίρνοντας το όριο $y \to y_0$ και επειδή $x \to x_0$, προκύπτει το ζητούμενο.

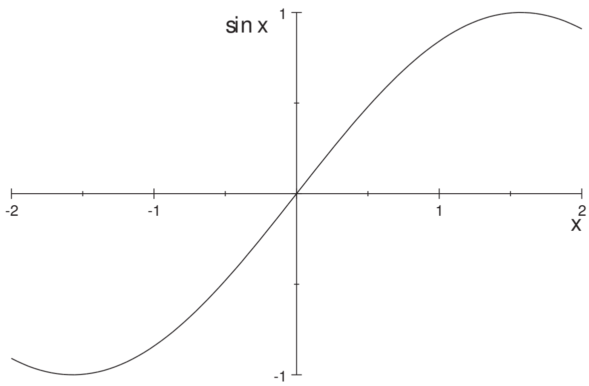
Παράδειγμα 1. Έστω $y = f(x) = x^2$. Η αντίστροφη της, $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$ έχει παράγωγο

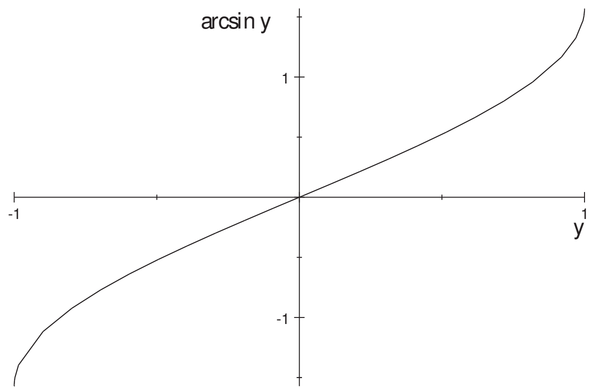
$$\left(f^{-1}(y)\right)' = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

- Ποια είναι η παράγωγος της αντιστρόφου της εκθετικής;

1.4.1 Αντίστροφες τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Ποιό είναι το τόξο που το ημίτονο του είναι $1/2$; Ως γνωστόν οι λύσεις είναι άπειρες, $x = \pi/6 + 2k\pi$ ή $x = -\pi/6 + (2k+1)\pi$. Αν όμως περιοριστούμε στο διάστημα $[-\pi/2, \pi/2]$, τότε





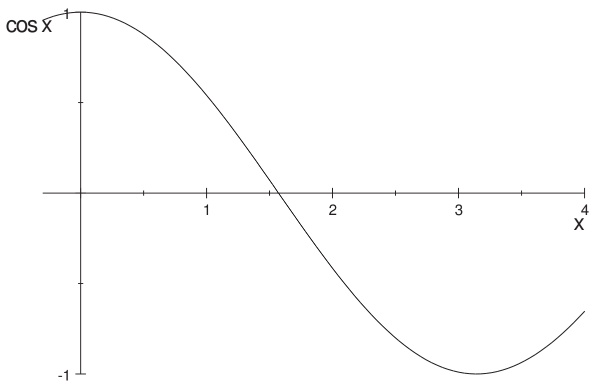
μπορούμε να πούμε ότι το "*τόξο ημιτόνου* 1/2" είναι ο αριθμός $\pi/6$. Η διαδικασία αυτή ορίζει την αντίστροφη της συνάρτησης

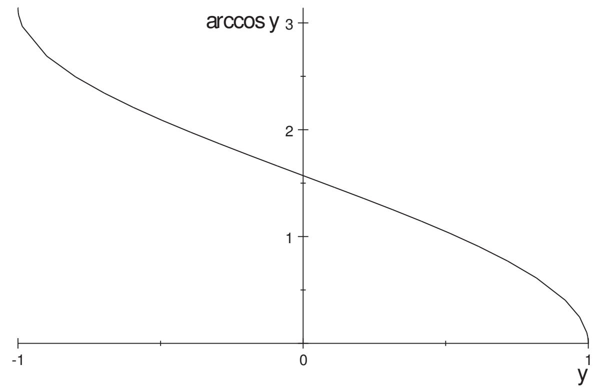
$$f(x) = \sin x, \qquad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

που συμβολίζεται με $\arcsin x$ ή $\sin^{-1} x$ και διαβάζεται *τόξο ημιτόνου* x. Προφανώς το πεδίο ορισμού της είναι το διάστημα $[-1, 1]$ και το πεδίο τιμών της είναι το διάστημα $[-\pi/2, \pi/2]$. Συνοψίζοντας,

$$\arcsin y = x \;\Leftrightarrow\; y = \sin x,$$

όπου $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ και $-1 \leq y \leq 1$.





Με εντελώς όμοιο τρόπο ορίζονται οι αντίστροφες των τριγωνομετρικών συναρτήσεων συνημίτονο και εφαπτομένη που συμβολίζονται $\arccos$ ή $\cos^{-1}$ και $\arctan$ ή $\tan^{-1}$ αντίστοιχα.

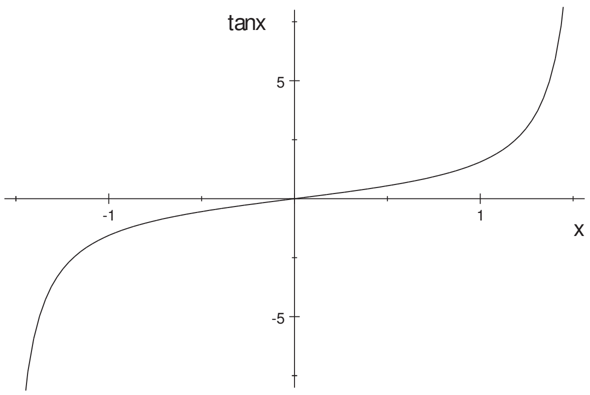
$$\arccos y = x \;\Leftrightarrow\; y = \cos x,$$

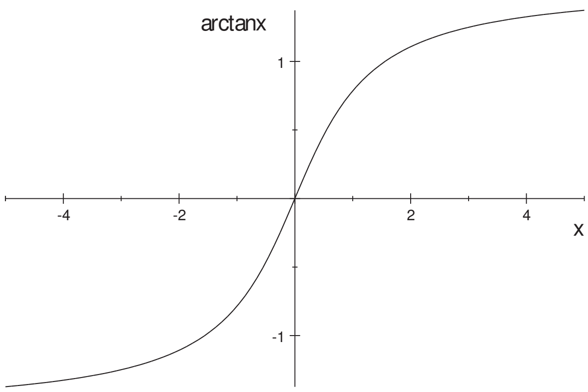
όπου $0 \leq x \leq \pi$ και $-1 \leq y \leq 1$.

Για κάθε y,

$$\arctan y = x \;\Leftrightarrow\; y = \tan x,$$

όπου $-\pi/2 < x < \pi/2$.





- Σχολιάστε τα πεδία ορισμού και τιμών των αντιστρόφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Βρείτε τις τιμές του x ώστε $\arccos x = 1/2$, $\arccos x = \sqrt{3}/2$, $\arctan x = -1$. Υπολογίστε τα $\arcsin(\sin \pi/6)$, $\arcsin(\cos \pi/3)$, $\arctan(\sin \pi/4)$, $\arctan(\tan(x+\pi))$.

Υπολογισμός των παραγώγων των αντιστρόφων συναρτήσεων. Ας εφαρμόσουμε τώρα το θεώρημα της παραγώγου αντίστροφης συνάρτησης για τις αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Στην πράξη, εφαρμόζουμε το Θεώρημα 5 ως εξής. Γράφουμε

$$y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y),$$

και παραγωγίζοντας ως προς x την ταυτότητα

$$f\left(f^{-1}(x)\right) = x,$$

θα έχουμε από τον κανόνα της αλυσίδας

$$f'(y)\frac{dy}{dx} = 1 \quad \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{f'(y)}.$$

Για την arcsin θα έχουμε λοιπόν

$$y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y,$$

και παραγωγίζοντας ως προς x την ταυτότητα

$$\sin(\arcsin x) = x,$$

θα έχουμε

$$\cos y \frac{dy}{dx} = 1 \quad \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

με άλλα λόγια,

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad -1 < x < 1.$$

Με βάση το ίδιο θεώρημα, να δείξετε ότι

$$\arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Για την arctan γράφουμε $y = \arctan x \Leftrightarrow x = \tan y$. Επειδή ισχύει η ταυτότητα $\tan(\arctan x) = x$, παραγωγίζοντας ως προς x και χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας προκύπτει

$$\frac{1}{\cos^2 y} y' = 1 \Rightarrow y' = \cos^2 y,$$

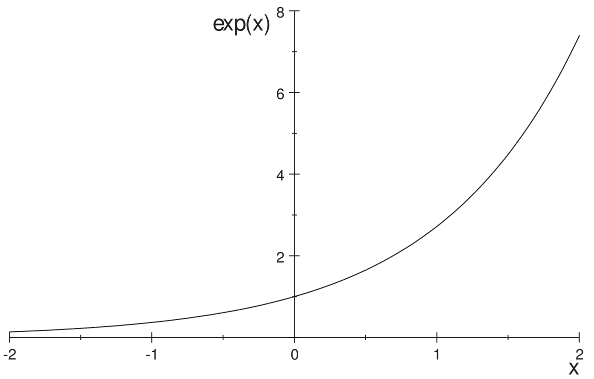
και επειδή $1/\cos^2 y = 1 + \tan^2 y$, έχουμε

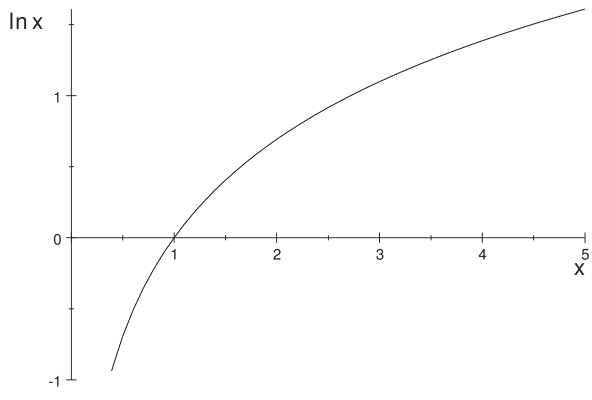
$$\arctan' x = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

- Εφαρμόστε την ίδια τεχνική για να βρείτε την παράγωγο των αντιστρόφων συναρτήσεων των: εκθετική, $n-$οστή ρίζα.

1.4.2 Εκθετική και λογαριθμική συνάρτηση

Τα διαγράμματα είναι ο καλύτερος τρόπος για να θυμόμαστε τις βασικές τους ιδιότητες.





Η εκθετική συνάρτηση e^x είναι γνησίως αύξουσα και μάλιστα αυξάνει ταχύτερα από κάθε πολυώνυμο. Ακριβέστερα,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty, \quad \text{ισοδύναμα} \quad \lim_{x\to\infty} x^n e^{-x} = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Απόδειξη. Εφαρμόστε τον κανόνα *lHôpital*. Δίνουμε και μια δεύτερη απόδειξη. Θα δείξουμε πρώτα ότι

$$e^x \geq 1 + x, \quad x \geq 0.$$

Πράγματι, η συνάρτηση $f(x) = e^x - (1+x)$ έχει μη αρνητική παράγωγο (γιατί;), άρα είναι αύξουσα για $x \geq 0$, άρα $f(x) \geq f(0) = 0$, ο.ε.δ. Όμοια δείχνουμε επαγωγικά ότι

$$e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!}, \quad x \geq 0.$$

Διαιρούμε την παραπάνω ανισότητα με x^n οπότε,

$$\frac{e^x}{x^{n-1}} \geq \frac{1}{x^{n-1}} + \frac{1}{x^{n-2}} + \frac{1}{2!x^{n-3}} + ... + \frac{x}{n!}, \quad x \geq 0,$$

και παίρνοντας το όριο όταν $x \to \infty$, έχουμε, $\lim_{x\to\infty} e^x/x^{n-1} = +\infty$.

Άμεση συνέπεια είναι η πρόταση

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

Πράγματι, θέτοντας $x = e^y \Leftrightarrow y = \ln x$, έχουμε

$$\frac{\ln x}{x} = \frac{y}{e^y} \to 0 \ \text{ όταν } \ y \to \infty.$$

- Δείξτε ότι $\lim_{x\to\infty} x^{1/x} = 1$.

Στην πραγματική ανάλυση αριθμός e ορίζεται αυστηρά ως το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Αν θέσουμε $h = 1/n$, τότε $h \to 0$ όταν $n \to \infty$. Θα δείξουμε ότι $\lim_{h\to 0} (1+h)^{1/h} = e$. Πράγματι, η παράγωγος της λογαριθμικής στο σημείο 1 είναι

$$1 = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h) - \ln 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = \lim_{h\to 0} \ln\left[(1+h)^{1/h}\right]$$

οπότε παίρνοντας εκθετικά έχουμε το ζητούμενο.

- Μπορούμε να δείξουμε εύκολα ότι για $x \geq 0$

$$x \geq e^{-x} \leq 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!}.$$

Μαζί με την $e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$, παίρνουμε μια καλή προσέγγιση για το e:

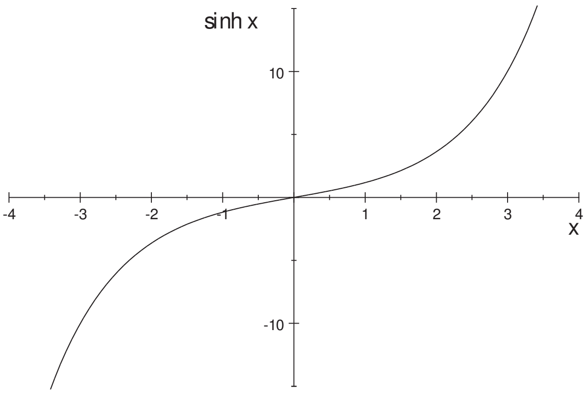
$$2.7 < e < 3.$$

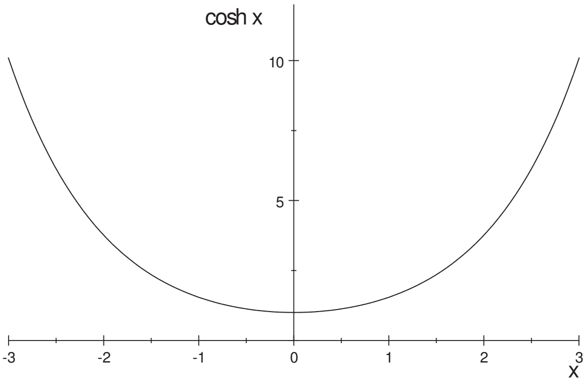
1.4.3 Υπερβολικές συναρτήσεις

Ορίζονται για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ως:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

sinh ονομάζεται υπερβολικό ημίτονο και είναι γνησίως αύξουσα, παραγωγίσιμη, περιττή, με





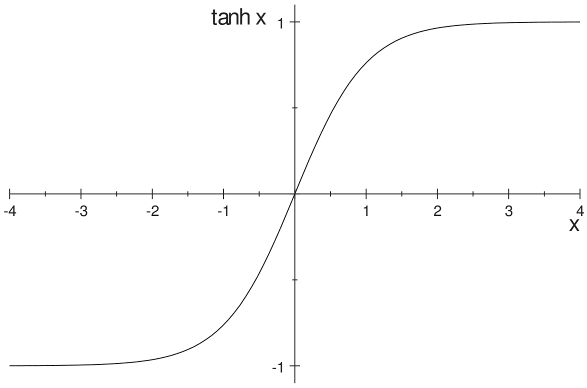
πεδίο τιμών ολόκληρο το $\mathbb{R}$.

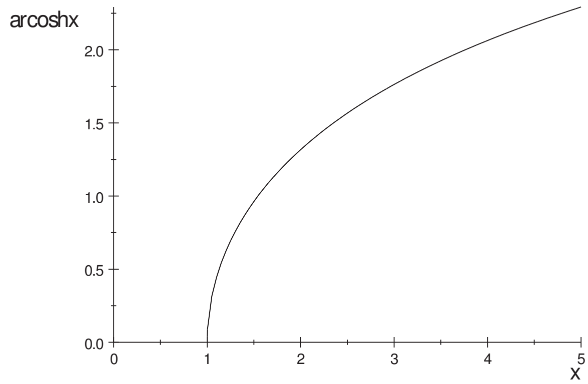
$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

cosh ονομάζεται υπερβολικό συνημίτονο και είναι, παραγωγίσιμη, άρτια, μη αρνητική για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με πεδίο τιμών $[1, +\infty)$.

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

tanh ονομάζεται υπερβολική εφαπτομένη και είναι γνησίως αύξουσα, παραγωγίσιμη, περιττή,





φραγμένη, με πεδίο τιμών $(-1, 1)$.

- Εύκολα προκύπτουν οι παρακάτω ταυτότητες

(α) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

(β) $1/\cosh^2 x = 1 - \tanh^2 x$

(γ) $\sinh(x + y) = \sinh x . \cosh x + \cosh x . \sinh y$

(δ) $\sinh' x = \cosh x, \quad \cosh' x = \sinh x, \quad \tanh' x = 1/\cosh^2 x$

Για να καταλάβετε γιατί ονομάζονται υπερβολικές, θέσετε $x(t) = \cosh t, \ y(t) = \sinh t$ και απαλείψτε το t, για να βρείτε τη σχέση μεταξύ x και y.

Οι αντίστροφες των υπερβολικών συναρτήσεων μπορούν εύκολα να βρεθούν. Π.χ. για το υπερβολικό ημίτονο θέτουμε $y = \left(e^x - e^{-x}\right)/2$ και λύνοντας ως προς x, βρίσκουμε $x = \ln\left(y + \sqrt{1+y^2}\right)$, άρα

$$\sinh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right),$$

με πεδία ορισμού και τιμών ολόκληρο το $\mathbb{R}$.

- Για την αντίστροφη του υπερβολικού συνημιτόνου, βρίσκουμε δυο τύπους και χρησιμοποιούμε την συνάρτηση $\cosh^{-1} : [1,\infty) \to [0,\infty)$ που παίρνει θετικές τιμές,

$$\cosh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right).$$

  Με όμοιο τρόπο βρίσκουμε

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x},$$

  με πεδίο ορισμού το $(-1,1)$ και πεδίο τιμών το $\mathbb{R}$.

Για να βρούμε τις παραγώγους των αντιστρόφων υπερβολικών συναρτήσεων, γράφουμε $y = \sinh^{-1} x \Leftrightarrow x = \sinh y$. Επειδή ισχύει η ταυτότητα $\sinh\left(\sinh^{-1} x\right) = x$, παραγωγίζοντας ως προς x και χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας προκύπτει

$$\cosh y y' = 1 \Rightarrow y' = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 y}}$$

και επειδή $\cosh y = \sqrt{1+\sinh^2 y}$, έχουμε

$$\frac{dy}{dx} = \left(\sinh^{-1} x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

- Με όμοιο τρόπο δείξτε ότι

$$\left(\cosh^{-1} x\right)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad \left(\tanh^{-1} x\right)' = \frac{1}{1-x^2}.$$

1.5 Σχόλια για τα ακρότατα μιας συνάρτησης

Τα σημεία x για τα οποία η παράγωγος $f'(x)$ μιας συνάρτησης είναι μηδέν, λέγονται κρίσιμα σημεία της f. Τα κρίσιμα σημεία είναι υποψήφια τοπικά ακρότατα.

Προσοχή στη διατύπωση του θεωρήματος: *Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο (a,b) και $x_0 \in (a,b)$ είναι τοπικό ακρότατο της f, τότε $f'(x_0) = 0$.* Αν το διάστημα είναι κλειστό, το θεώρημα δεν "δουλεύει". Το αντίστροφο του θεωρήματος (δηλ. *Αν $f'(x_0) = 0$, τότε x_0 είναι ακρότατο*) **ΔΕΝ** ισχύει. Π.χ. για την $f(x) = x^3$, $f'(0) = 0$, αλλά το 0 δεν είναι τοπικό ακρότατο. Κατά συνέπεια, για να βρούμε τα ακρότατα μιας συνάρτησης σε κάποιο διάστημα $[a,b]$, ψάχνουμε μεταξύ των εξής υποψηφίων:

- Κρίσιμων σημείων της f.
- Άκρων του διαστήματος $[a, b]$.
- Σημείων που δεν υπάρχει η παράγωγος της f.

Φυσικά μπορούμε να ελέγξουμε αν ένα κρίσιμο σημείο είναι σημείο ακροτάτου της φ, με το πρόσημο της δεύτερης παραγώγου: *Έστω $f'(x_0) = 0$. Αν $f''(x_0) > 0$, τότε x_0 είναι σημείο τοπικού ελαχίστου της f. Αν $f''(x_0) < 0$, τότε x_0, είναι σημείο τοπικού μεγίστου της f.*

Το χρησιμότατο αυτό θεώρημα είναι αναποτελεσματικό στις εξής περιπτώσεις:

1. $f''(x_0) = 0$, π.χ. f με τύπο $f(x) = x^4$, $f(x) = -x^4$, $f(x) = x^3$. Και στα τρία παραδείγματα $f''(x_0) = 0$, αλλά το 0 είναι αντίστοιχα, ελάχιστο, μέγιστο, τίποτα.

2. Η $f''(x_0)$ είναι πολύπλοκη παράσταση.

Αν το διάστημα δεν είναι κλειστό, δεν υπάρχουν συγκεκριμένοι κανόνες.

- Για παράδειγμα, βρείτε το μέγιστο και το ελάχιστο της $f(x) = x^x$ στο $(0, 1]$. Ποιο είναι το μέγιστο και το ελάχιστο της $f(x) = x^3 - x$ στο $[-1, 2]$;

1.6 Ασκήσεις

Προς διευκόλυνση των φοιτητών επαναλαμβάνουμε κάποιους τύπους.

Παράγωγοι αντιστρόφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \frac{d}{dx}\cos^{-1}x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \frac{d}{dx}\tan^{-1}x = \frac{1}{x^2+1}$$

Αντίστροφες υπερβολικές συναρτήσεις

$$\sinh^{-1}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right), \ \cosh^{-1}x = \ln\left(x + \sqrt{1-x^2}\right), \ \tan^{-1}x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

Παράγωγοι αντιστρόφων υπερβολικών συναρτήσεων

$$\frac{d}{dx}\sinh^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \ \frac{d}{dx}\cosh^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \ \frac{d}{dx}\tanh^{-1}x = \frac{1}{1-x^2}$$

Σχετικά ολοκληρώματα

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{a} + C, \ \int\frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \sinh^{-1}\frac{x}{a} + C, \ \int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \cosh^{-1}\frac{x}{a} + C$$

Βρείτε την αντίστροφη της $y = x^3$ και υπολογίστε την παράγωγο της στο σημείο 1 α) απευθείας και β) από τον τύπο $\left(f^{-1}(y)\right)' = 1/f'(x)$. Τι συμβαίνει στο $x = 0$;

Για κάθε μια από τις παρακάτω συναρτήσεις f βρείτε ένα διάστημα ώστε να ορίζεται η αντίστροφη f^{-1} και βρείτε την παράγωγο της f^{-1} στο ενδεικνυόμενο σημείο.

1. $f(x) = x^3 + 1$. Βρείτε την $\left(f^{-1}(2)\right)'$.
2. $f(x) = x^2 - x + 5$. Βρείτε την $\left(f^{-1}(7)\right)'$.
3. $f(x) = x^4 - 3x^2 + 1$. Βρείτε την $\left(f^{-1}(-1)\right)'$.
4. $f(x) = \tan x^2$. Βρείτε την $\left(f^{-1}(\pi/4)\right)'$.

Άλλος τρόπος ορισμού της εκθετικής συνάρτησης

Υποθέτουμε ότι υπάρχει συνάρτηση f ορισμένη σε όλο το $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f' = f$ και $f(0) = 1$. Τότε:

1. $f(x) \neq 0$ για κάθε x και μάλιστα $f(x) f(-x) = 1$.
2. Η f είναι μοναδική.
3. Η f είναι γνησίως αύξουσα και στρέφει τα κοίλα άνω.
4. $\forall x, y$ ισχύει $f(x+y) = f(x) f(y)$.
5. Για κάθε θετικό ακέραιο n ισχύει $f(na) = f(a)^n$.
6. Ορίζουμε $e = f(1)$, άρα $f(n) = e^n$ και $e > 1$. Επίσης $f(-n) = e^{-n}$. Άρα μπορούμε στο εξής να γράφουμε
$$f(x) = e^x.$$

Γραφήματα

Για κάθε μια από τις παρακάτω συναρτήσεις f κάνετε ποιοτικά το σκίτσο του γραφήματος της.

1. $f(x) = xe^x$ και $g(x) = xe^{-x}$
2. $f(x) = x^2 e^x$ και $g(x) = x^2 e^{-x}$
3. $f(x) = e^{-x^2}$ και $f(x \pm 1)$
4. $f(x) = e^{1/x}$ και $g(x) = e^{-1/x}$

5. $f(x) = \sin^2 x$ και $f(x - \pi/2)$

6. $f(x) = \tan^{-1} x$ και $f(x + 1)$

7. $f(x) = x \sin x$ και $g(x) = x^2 \sin x$

8. $f(x) = \cos^2 x$ και $g(x) = \cos 3x$

9. $f(t) = 1/(1 - t)$ και $g(t) = 1/(t - 1)$

10. $f(t) = (1 - t)(t - 2)^2, \quad g(t) = (t - 1)(t^2 + 2)$

11. $f(t) = t(1 - t)(t - 2)^2, \quad g(t) = t(t - 1)(t^2 + 2)$

12. $f(t) = t^3 - 6t^2 + 11t - 6, \quad g(t) = t^4 - t^3 - \frac{9}{5}t^2 - \frac{1}{5}t - \frac{2}{5}$

Μέγιστα-ελάχιστα

Ο ρυθμός γεννήσεων B ενός πληθυσμού βακτηριδίων δίνεται από

$$B(t) = 200te^{-0.2t},$$

B = αριθ. γεννήσεων/ώρα, t χρόνος σε ώρες. Ο ρυθμός θανάτων του πληθυσμού αυτού δίνεται από

$$D(t) = t(25 - t).$$

Σχεδιάστε τις $B(t)$, $D(t)$. Πότε ο ρυθμός αύξησης του πληθυσμού είναι μέγιστος; Ποια στιγμή ο πληθυσμός είναι μέγιστος;

Κεφάλαιο 2

ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ

2.1 Ολοκλήρωμα Riemann

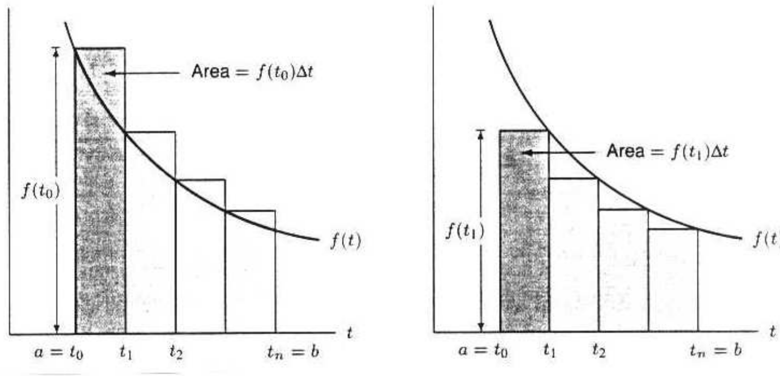
Υπενθυμίζουμε εν συντομία τον ορισμό του ολοκληρώματος Riemann. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και φραγμένη. Χωρίζουμε το διάστημα $[a, b]$ σε n ίσα υποδιαστήματα και θέτουμε

$$\Delta t = \frac{b-a}{n}$$

Το Δt λέγεται λεπτότητα της διαμέρισης του διαστήματος $[a, b]$. Αριθμούμε τα άκρα των υποδιαστημάτων $a = t_0, t_1, \ldots, t_n = b$ όπως στο σχήμα και σχηματίζουμε το

$$\text{Κάτω άθροισμα} = f(t_0)\,\Delta t + f(t_1)\,\Delta t + ... + f(t_{n-1})\,\Delta t = \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)\,\Delta t,$$

$$\text{Άνω άθροισμα} = f(t_1)\,\Delta t + f(t_2)\,\Delta t + ... + f(t_n)\,\Delta t = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta t.$$



Τα αθροίσματα αυτά παριστάνουν τα γραμμοσκιασμένα εμβαδά του σχήματος. Θεωρούμε τώρα τα όρια όταν $n \to \infty$ (άρα η λεπτότητα της διαμέρισης Δt τείνει στο μηδέν). Αποδεικνύεται ότι τα όρια υπάρχουν και μάλιστα είναι ίσα. Το κοινό αυτό όριο ονομάζεται *ολοκλήρωμα Riemann* της f και συμβολίζεται

$$\int_a^b f \quad \text{ή} \quad \int_a^b f\ (t)\, dt.$$

Παρατήρηση. Δεν είναι απαραίτητο να χωρίσουμε το διάστημα $[a, b]$ σε ίσα υποδιαστήματα για να πάρουμε τα όρια των αθροισμάτων. Αν για κάθε n ορίσουμε ως λεπτότητα της διαμέρισης το

$$\max_{i=1,\ldots,n} (t_i - t_{i-1})$$

και θεωρήσουμε ότι ταυτόχρονα $n \to \infty$ και λεπτότητα διαμέρισης $\to 0$, αποδεικνύεται ότι το όριο υπάρχει και είναι ίσο με το ολοκλήρωμα Riemann.

Σε κάθε υποδιάστημα $[t_i, t_{i-1}]$ θεωρούμε τώρα ένα τυχαίο σημείο ξ_i και σχηματίζουμε το

$$\text{Ενδιάμεσο άθροισμα} = f\ (\xi_1)\, \Delta t_1 + f\ (\xi_2)\, \Delta t_2 + \ldots + f\ (\xi_n)\, \Delta t_n = \sum_{i=1}^{n} f\ (\xi_i)\, \Delta t_i,$$

όπου $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$. Θα ονομάζουμε *άθροισμα Riemann* της f οποιοδήποτε από τα κάτω άθροισμα, άνω άθροισμα, ενδιάμεσο άθροισμα. Αποδεικνύεται ότι όταν $n \to \infty$ και $\Delta t_i \to 0$, το όριο υπάρχει και είναι ίσο με το ολοκλήρωμα Riemann της f. Ακριβέστερα, ισχύει το παρακάτω

Θεώρημα 1. *Αν f είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε αν $\{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ είναι μια οποιαδήποτε διαμέριση του $[a, b]$ με όλα τα μήκη $\Delta t_i = t_i - t_{i-1} < \delta$, τότε*

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f\ (\xi_i)\, \Delta t_i - \int_a^b f \right| < \varepsilon$$

για κάθε άθροισμα Riemann που σχηματίζεται αν διαλέξουμε ξ_i στο $[t_i, t_{i-1}]$.

Η ύπαρξη των ορίων και η κοινή τιμή τους οφείλεται στις καλές ιδιότητες της συνάρτησης f: υποθέσαμε ότι είναι συνεχής και φραγμένη. Το θεώρημα ισχύει και για συναρτήσεις που έχουν πεπερασμένο πλήθος συνεχειών (Βλ. σχήμα: $\int_0^2 f = \int_0^2 g$, δηλαδή η συνεχής f και η ασυνεχής g έχουν ίδιο ολοκλήρωμα.)

2.1.1 Ιδιότητες του ολοκληρώματος

(α)
$$\int_a^b f = -\int_b^a f \quad \text{και} \int_a^a f = 0$$
(β)
$$\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$$
(γ)
$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g, \quad \text{και} \quad \int_a^b cf = c\int_a^b f, \quad c \in \mathbb{R}$$
(δ)
$$\text{Αν} \quad f(t) \geq 0 \ \forall t \in [a,b], \quad \text{τότε} \int_a^b f \geq 0$$

Πορίσματα της ιδιότητας (δ):

1. Αν $f(t) \leq g(t) \ \forall t \in [a,b], \quad$ τότε $\displaystyle\int_a^b f \leq \int_a^b g$

2. $m \leq f(t) \leq M \ \forall t \in [a,b], \quad$ τότε $\displaystyle m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$

(ε)
$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$$

Σημείωση. Στην θεωρία ολοκλήρωσης, η ιδιότητα (α) τίθεται ως ορισμός, η δε ιδιότητα (β) ισχύει ανεξάρτητα από τη διάταξη των a, b, c (δηλαδή δεν απαιτούμε να ισχύει $a < c < b$). Η (β) λέγεται προσθετική ιδιότητα του ολοκληρώματος και προκύπτει άμεσα από τον ορισμό. Η (γ) λέγεται γραμμική ιδιότητα του ολοκληρώματος. Η ιδιότητα (δ) είναι σημαντική διότι επιτρέπει μέσω των πορισμάτων της να κάνουμε εκτιμήσεις για την τιμή ενός ολοκληρώματος, π.χ.
$$0 \leq \int_0^{\pi/2} \sin x^2 \ dx \leq \pi/2.$$

- Σχολιάστε τη γεωμετρική σημασία των ιδιοτήτων αυτών κάνοντας κατάλληλα σχήματα. Αποδείξτε την ιδιότητα (ε) και δικαιολογείστε την γραφικά. Αποδείξτε τα δυο πορίσματα της (δ). Αποδείξτε δυο ιδιότητες που πολλές φορές μας γλυτώνουν από πολύ κόπο:

Αν f περιττή τότε
$$\int_{-a}^a f = 0.$$
Αν f άρτια τότε
$$\int_{-a}^a f = 2\int_0^a f.$$

2.1.2 Θεώρημα μέσης τιμής

Έστω f συνεχής στο $[a,b]$. Δείξτε ότι $\exists \xi \in [a,b]$:

$$\int_a^b f = f(\xi)(b-a).$$

Γενίκευση: *Έστω f και g συνεχείς στο $[a,b]$. Δείξτε ότι $\exists \xi \in [a,b]$:*

$$\int_a^b fg = f(\xi)\int_a^b g.$$

2.2 Το Θεμελειώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού

Το θεώρημα αυτό συνδέει δυο εκ πρώτης όψεως διαφορετικές έννοιες, της παραγώγου και του ολοκληρώματος.

Θεώρημα 2. *Έστω f συνεχής συνάρτηση στο $[a,b]$. Ορίζουμε την συνάρτηση*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

Η F είναι παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ και μάλιστα

$$F'(x) = f(x)$$

για x στο $[a,b]$.

Απόδειξη. Γράφουμε το πηλίκο Newton για $h > 0$,

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{\int_a^{x+h} f - \int_a^x f}{h} = \frac{\int_a^x f + \int_x^{x+h} f - \int_a^x f}{h} = \frac{\int_x^{x+h} f}{h}$$

Έστω p ένα σημείο μεταξύ x και $x+h$ όπου η f παίρνει την ελάχιστη τιμή στο διάστημα $[x, x+h]$ και έστω q ένα σημείο στο διάστημα αυτό όπου η f παίρνει την μέγιστη τιμή. Θέτουμε $m = f(p)$ και $M = f(q)$. Από το Πόρισμα 2 θα έχουμε

$$mh \le \int_x^{x+h} f \le Mh$$

Διαιρώντας με h έχουμε

$$f(p) \le \frac{\int_x^{x+h} f}{h} \le f(q).$$

Καθώς $h \to 0$, προφανώς $p, q \to x$ και επειδή η f είναι συνεχής, συμπεραίνουμε ότι το όριο του πηλίκου Newton υπάρχει και ισούται με $f(x)$. Η περίπτωση $h < 0$ είναι παρόμοια και η απόδειξη είναι χρέος του αναγνώστη.

Υπενθυμίζουμε ότι αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και υπάρχει κάποια συνάρτηση F τέτοια ώστε $F'(x) = f(x)\,,\ \ x \in [a, b]\,,$ η F λέγεται *παράγουσα ή αρχική ή αντιπαράγωγος* της f. Για παράδειγμα, η συνάρτηση με τύπο $f(x) = x^2$ έχει μία παράγουσα, την $F(x) = x^3/3$. Αλλά και η συνάρτηση με τύπο $x^3/3 + C$, $C \in \mathbb{R}$, είναι μία παράγουσα της f. Συμπεραίνουμε ότι δύο παράγουσες μιας συνάρτησης διαφέρουν κατά μία σταθερή. Το Θεμελειώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού μας εξασφαλίζει ότι για κάθε συνεχή συνάρτηση f υπάρχει παράγουσα και δίνεται από τον τύπο $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, δηλαδή

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)\,.$$

Πόρισμα. *Αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και $f = F'$ για κάποια συνάρτηση F, τότε*

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a)$$

Απόδειξη. Οι συναρτήσεις F και $\int_a^x f$ έχουν την ίδια παράγωγο, άρα διαφέρουν κατά μια σταθερά C, δηλαδή για κάθε x έχουμε

$$F(x) = \int_a^x f + C.$$

Θέτοντας $x = a$, προκύπτει $C = F(a)$.

Συνήθως το πόρισμα αυτό αναφέρεται ως δεύτερο θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού και δίνεται με τη μορφή

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)\,. \tag{2.2.1}$$

Το πόρισμα έχει μεγάλη πρακτική σημασια διότι μας δίνει ένα κανόνα υπολογισμού του ορισμένου ολοκληρώματος: *Για τον υπολογισμό του $\int_a^b f$, βρίσκουμε μια οποιαδήποτε παράγουσα της f, έστω F, και εφαρμόζουμε τον τύπο (2.2.1).*

Ορισμός. *Το σύνολο των παραγουσών μιας συνεχούς συνάρτησης f, λέγεται αόριστο ολοκλήρωμα της f και συμβολίζεται με*

$$\int f(x)\,dx.$$

Συνεπώς, αν F είναι μια οποιαδήποτε παράγουσα της f, θα έχουμε

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Για παράδειγμα

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C, \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C.$$

Οι μέθοδοι υπολογισμού αορίστων ολοκληρωμάτων είναι γνωστές από τη μέση εκπαίδευση και επαναλαμβάνονται συνοπτικά στην επόμενη παράγραφο.

2.3 Μέθοδοι ολοκλήρωσης

Παραθέτουμε συνοπτικά τις κυριώτερες μεθόδους ολοκλήρωσης. Περισσότερα παραδείγματα μπορείτε να βρείτε σε οποιοδήποτε βιβλίο Απειροστικού Λογισμού.

2.3.1 Διαφορικό μιας συνάρτησης

Η έννοια της απειροστής ποσότητας (κάτι που είναι απείρως μικρό) διατυπώθηκε από τον Αρχιμήδη, παρ΄ ότι ο ίδιος πίστευε ότι τα επιχειρήματα που εμπεριέχουν απειροστά δεν είναι αυστηρά. Με το συμβολισμό του Leibniz, αν x είναι μια μεταβλητή, τότε Δx ή δx είναι η μεταβολή της και αν η μεταβολή είναι απείρως μικρή, τότε συμβολίζεται με dx. Έτσι διατυπωμένη η έννοια του απειροστού δεν είναι μια ακριβής μαθηματική έννοια, είναι όμως διαισθητικά πολύ χρήσιμη. Για τον Leibniz, αν y είναι συνάρτηση του x, τότε παράγωγος του y ως προς x είναι το όριο του πηλίκου των μεταβολών $\Delta y/\Delta x$ καθώς η μεταβολή Δx γίνεται απείρως μικρή. Την παράγωγο ο Leibniz συμβόλιζε με

$$\frac{dy}{dx}$$

και για την απειροστή μεταβολή (διαφορικό) του y έγραφε

$$dy = \frac{dy}{dx}dx.$$

Φυσικά με τον σύγχρονο ορισμό της παραγώγου, dy/dx είναι κάποιο όριο και όχι πηλίκο απειροστών ποσοτήτων. Ο συμβολισμός του Leibniz είναι βολικός κυρίως γιατί επιτρέπει να ορίσουμε την χρήσιμη έννοια του διαφορικού. *Διαφορικό* μιας συνάρτησης f ονομάζεται η παράσταση $f'(x)\,dx$ και συμβολίζεται με df, δηλαδή

$$df = f'(x)\,dx.$$

Για παράδειγμα, το διαφορικό της συνάρτησης με τύπο $\cos x$ είναι $-\sin x dx$ και της εκθετικής είναι $de^x = e^x dx$. Μερικά ακόμα παραδείγματα είναι

$$dx^2 = 2xdx,\ d\sin x = \cos x dx,\quad d\ln x = \frac{dx}{x},\quad d\,(x+1) = dx,\ d\left(x^2+3x\right) = (2x+3)\,dx.$$

2.3.2 Μέθοδος αντικατάστασης

$$\int f(\underbrace{g(x)}_{u})\underbrace{g'(x)\,dx}_{du} = \int f(u)\,du$$

1.

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{d\cos x}{\cos x} \underset{\substack{\uparrow \\ u=\cos x}}{=} -\int \frac{du}{u} = -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C$$

2.

$$\int \frac{dx}{x\ln x} \underset{\ln x=t,\, dt=dx/x}{\overset{\uparrow}{=}} \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\ln x| + C$$

3.

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx \underset{e^x=t,\, dt=e^x dx}{\overset{\uparrow}{=}} \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + C = \arcsin e^x + C$$

4.

$$\int \frac{xdx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+t} = \frac{1}{2}\int \frac{d(1+t)}{1+t} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u| + C$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C$$

2.3.3 Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

$$\int fg' = fg - \int f'g$$

Χρησιμοποιείται σε ολοκληρώματα του τύπου

$$\int x^n e^x dx, \int x^n \cos x dx, \int x^n \sin x dx, \int \cos^n x e^x dx, \int \sin^n x dx, ...$$

1.

$$\int xe^x dx = xe^x - \int x' e^x dx = xe^x - e^x + C$$

2.

$$\int u \underset{g'(u)}{\underset{\uparrow}{\sin}} u du = u(-\cos u) - \int (-\cos u)\, du = -u\cos u + \sin u + C$$

3.

$$\int \ln x dx = \int \underset{g'(x)}{\underset{\uparrow}{1}} \ln x dx = x\ln x - \int x\frac{1}{x}dx = x\ln x - x + C$$

4.

$$I = \int e^x \underset{g'(x)}{\underset{\uparrow}{\sin}} x dx = e^x(-\cos x) - \int \underset{u}{\underset{\uparrow}{e^x}}(-\underset{v'}{\underset{\uparrow}{\cos}} x)dx$$
$$= -e^x\cos x + e^x \sin x - \underbrace{\int e^x \sin x dx}_{I} \Rightarrow 2I = e^x(\sin x - \cos x) + C$$

5.

$$I = \int \frac{1}{x}\ln x dx = \ln x \ln x - \int \frac{1}{x}\ln x dx \Rightarrow 2I = (\ln x)^2 + C$$

6.
$$\int t^6 \ln t dt = \frac{t^7}{7}\ln t - \int \frac{t^7}{7}\frac{1}{t}dt = \frac{t^7}{7}\ln t - \frac{1}{7}\int t^6 dt = \frac{t^7}{7}\ln t - \frac{t^7}{49} + C$$

Παρατήρηση. Ολοκληρώματα μετασχηματίζονται σε απλούστερα με αντικαταστάσεις: π.χ. επειδή
$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x + C,$$
θα έχουμε
$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1+x^2/a^2} = \frac{1}{a^2}a\int \frac{d\left(x/a\right)}{1+x^2/a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C.$$
Όμοια
$$\int \frac{dx}{1+b^2x^2} = \frac{1}{b}\int \frac{d\left(bx\right)}{1+b^2x^2} = \frac{1}{b}\tan^{-1}\left(bx\right).$$
Όμοια
$$\int \frac{dx}{a^2+b^2x^2} = \frac{1}{ab}\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}x\right).$$
Όμοια για $a > 0$ και $-a < x < a$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{dx}{a\sqrt{1-x^2/a^2}} = \int \frac{d\left(x/a\right)}{\sqrt{1-\left(x/a\right)^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C.$$
Όμοια
$$\int \frac{dx}{\sqrt{5-3x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{3}{5}}x\right) + C.$$
Στο $I = \int \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}dt$ πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρανομαστή με $\sqrt{1-t}$ οπότε
$$I = \int \frac{1-t}{\sqrt{1-t^2}}dt = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} - \int \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt = ... = \sin^{-1} t - \sqrt{1-t^2} + C$$

2.3.4 Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων

Ρητή συνάρτηση είναι πηλίκο δυο πολυωνύμων $\frac{P(x)}{Q(x)}$. Υποθέτουμε ότι βαθμός P <βαθμός Q. Τότε η ρητή συνάρτηση γράφεται ως άθροισμα απλών κλασμάτων, π.χ.
$$\frac{2x-1}{\left(x-1\right)\left(x+2\right)\left(x-3\right)} = \frac{A}{\left(x-1\right)} + \frac{B}{\left(x+2\right)} + \frac{C}{\left(x-3\right)}$$
όπου τα A, B, C βρίσκονται με τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών. Έτσι βρίσκουμε
$$\int \frac{2x-1}{\left(x-1\right)\left(x+2\right)\left(x-3\right)}dx = -\frac{1}{6}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-3}$$

Αν $Q(x)$ έχει μια πραγματική ρίζα a, βαθμού πολλαπλότητας k, τότε θα έχουμε απλά κλάσματα του τύπου

$$\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+...+\frac{A_k}{(x-a)^k}$$

π.χ.

$$\frac{x+2}{(x+1)^3(x-2)}=\frac{A_1}{x+1}+\frac{A_2}{(x+1)^2}+\frac{A_3}{(x+1)^3}+\frac{B}{x-2}$$

Στην περίπτωση μιγαδικών ριζών

$$\frac{x+2}{(x+1)(x^2+2)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$$

2.3.5 Ολοκληρώματα που περιέχουν $\sqrt{a^2-x^2}$

Αντικατάσταση: $x=a\sin t$

$$\int\sqrt{a^2-x^2}dx \underset{x=a\sin t,\, dx=a\cos tdt}{\underset{\uparrow}{=}} a^2\int\sqrt{1-\sin^2 t}\cos tdt=a^2\int\cos^2 tdt=a^2\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt$$
$$=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C=\frac{a^2}{2}(t+\sin t\cos t)+C=\frac{a^2}{2}\left(t+\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}\right)+C$$
$$=\frac{a^2}{2}\left(\sin^{-1}\frac{x}{a}+\frac{x}{a}\sqrt{1-x^2/a^2}\right)+C$$

2.3.6 Ολοκληρώματα που περιέχουν $\sqrt{x^2+a^2}$, $\sqrt{x^2-a^2}$

Αντικατάσταση: $x=a\sinh t$, $x=a\cosh t$ (ταυτότητα: $\cosh^2 t-\sinh^2 t=1$)

Στο $I=\int\sqrt{x^2+a^2}dx$, θέτουμε $x=a\sinh t$, $dx=a\cosh tdt$, οπότε

$$I=a^2\int\sqrt{\sinh^2 t+1}\cosh tdt=a^2\int\cosh^2 tdt=a^2\int\cosh t\sinh' tdt$$
$$=a^2\cosh t\sinh t-a^2\int\underbrace{\cosh' t\sinh t}_{\sinh^2 t}dt+C=a^2\cosh t\sinh t-a^2\int\left(1+\cosh^2 t\right)dt+C$$
$$=a^2(\cosh t\sinh t-t-I)+C$$

άρα

$$I=\frac{a^2}{1+a^2}(\cosh t\sinh t-t)+C=\frac{1}{1+a^2}\left(x\sqrt{x^2+a^2}-a\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|\right)+C$$

Στο $I=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$, θέτουμε $x=\cosh t$, $dx=\sinh tdt$, και επιβεβαιώνουμε ότι $I=\cosh^{-1}x+C$. Όμοια $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}=\sinh^{-1}x+C$. Στο $I=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$, θέτουμε $x=a\cosh t$, $dx=a\sinh tdt$, ή το φέρνουμε στη μορφή $\int\frac{du}{\sqrt{u^2-1}}$.

2.3.7 Ολοκληρώματα γινομένων $\cos ax,\ \sin bx$

Ανάγονται σε ολοκληρώματα $\int \cos Ax dx$, $\int \sin Ax dx$ χάρη στους τύπους

$$\begin{aligned}
\sin ax \sin bx &= \frac{1}{2}\left[\cos(a-b)x - \cos(a+b)x\right] \\
\cos ax \cos bx &= \frac{1}{2}\left[\cos(a+b)x + \cos(a-b)x\right] \\
\sin ax \cos bx &= \frac{1}{2}\left[\sin(a+b)x + \sin(a-b)x\right]
\end{aligned}$$

2.3.8 Αναγωγικοί τύποι

1.

$$I_n = \int \tan^n x dx = \int \tan^{n-2} x \underbrace{\tan^2 x}_{1/\cos^2 x - 1} dx =$$

$$\int \tan^{n-2} x \tan' x dx - \int \tan^{n-2} x dx + C \underset{u=\tan x}{\underset{\uparrow}{=}} \int u^{n-2} du - I_{n-2} + C$$

Άρα

$$I_n = -I_{n-2} + \frac{1}{n-1}\tan^{n-1} x + C$$

2.

$$I_n = \int \sin^n x dx = \int \sin^{n-1} x\left(-\cos x\right)' dx = -\sin^{n-1} x \cos x +$$

$$(n-1)\int \sin^{n-2} x \underbrace{\cos^2 x}_{1-\sin^2 x} dx + C = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n + C$$

άρα

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} - \frac{1}{n}\cos x \sin^{n-1} x + C$$

3. Όμοια βρίσκουμε

$$I_n = \int \cos^n x dx \Rightarrow I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} + \frac{1}{n}\sin x \cos^{n-1} x + C$$

4. Έστω

$$I_n = \int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^n},$$

με $I_1 = \tan^{-1} x + C$. Τότε

$$I_{n+1} = \int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^{n+1}} = \int \frac{x^2+1}{\left(x^2+1\right)^{n+1}} dx - \int \frac{x^2}{\left(x^2+1\right)^{n+1}} dx =$$

$$I_n - \int x d\left(\frac{-1}{2n\left(x^2+1\right)^n}\right) = I_n + \frac{x}{2n\left(x^2+1\right)^n} - \frac{1}{2n}\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^n},$$

άρα

$$I_{n+1} = \frac{x}{2n\left(x^2+1\right)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n$$

2.4 Γενικευμένα ολοκληρώματα

Είναι ολοκληρώματα όπου ένα όριο της ολοκλήρωσης είναι άπειρο ή η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση δεν είναι φραγμένη στο διάστημα της ολοκλήρωσης. Στην πρώτη περίπτωση, το ολοκλήρωμα ορίζεται ως

$$\int_a^{\infty} f(t)\,dt = \lim_{x\to\infty}\int_a^x f(t)\,dt,$$

αρκεί να υπάρχει το όριο. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα υπάρχει, ή συγκλίνει. Για παράδειγμα

$$\int_1^{\infty}\frac{dt}{t^2} = \lim_{x\to\infty}\int_1^x \frac{dt}{t^2} = \lim_{x\to\infty}\left[-\frac{1}{t}\right]_1^x = \lim_{x\to\infty}\left[-\frac{1}{x}+1\right] = 1,$$

ενώ το ολοκλήρωμα

$$\int_1^{\infty}\frac{dt}{t}$$

αποκλίνει (γιατί;)

Όμοια ορίζεται και το

$$\int_{-\infty}^{b} f(t)\,dt = \lim_{x\to-\infty}\int_x^b f(t)\,dt,$$

Π.χ. το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{0} e^t dt$ υπάρχει (υπολογίστε την τιμή του).

Το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ ορίζεται ως

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt + \int_0^{\infty} f(t)\,dt$$

με την προϋπόθεση ότι και τα δυο όρια υπάρχουν. Π.χ. το

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t dt$$

δεν υπάρχει ενώ

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2} = \pi.$$

- Εξετάστε αν τα παρακάτω ολοκληρώματα συγκλίνουν και υπολογίστε (αν είναι δυνατόν) την τιμή τους.

$$\int_0^{\infty} e^{-t}\cos t dt,\quad \int_0^{\infty} e^{-t}\sin t dt,\quad \int_0^{\infty} e^{-at}\sin\omega t dt,\quad a,\omega>0.$$

$$\int_1^{\infty}\frac{dt}{t^p},\qquad p>1,\ p=1,\ p<1.$$

$$\int_0^{\infty} xe^{-x}dx,\ \int_0^{\infty} x^2e^{-x}dx,\ \int_0^{\infty} x^n e^{-x}dx,\quad n\in\mathbb{N}.$$

Ο άλλος τύπος γενικευμένου ολοκληρώματος απαντάται όταν το διάστημα της ολοκλήρωσης είναι φραγμένο, αλλά η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση δεν είναι φραγμένη, π.χ.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

Στην περίπτωση αυτή το γενικευμένο ολοκλήρωμα ορίζεται ως

$$\int_a^b f = \lim_{\delta \to 0} \int_{a+\delta}^b f,$$

με την προϋπόθεση ότι το όριο υπάρχει. Όμοια ορίζεται το

$$\int_a^b f = \lim_{\delta \to 0} \int_a^{b-\delta} f.$$

Έτσι έχουμε

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\delta \to 0} \int_\delta^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\delta \to 0} 2 \left. \sqrt{x} \right|_\delta^1 = \lim_{\delta \to 0} 2 \left(1 - \sqrt{\delta}\right) = 2.$$

- Εξετάστε αν τα παρακάτω ολοκληρώματα συγκλίνουν και υπολογίστε (αν είναι δυνατόν) την τιμή τους.

$$\int_0^6 \frac{dt}{(t-4)^{2/3}}, \qquad \int_0^1 \frac{dt}{t^p}, \qquad p > 1,\ p = 1,\ p < 1.$$

Παρ΄ όλο που δεν είναι πάντα δυνατόν να υπολογίσουμε ένα ολοκλήρωμα, πολλές φορές μπορούμε να αποφανθούμε για το αν ένα γενικευμένο ολοκλήρωμα συγκλίνει. Η συνηθισμένη τακτική είναι να το συγκρίνουμε με ένα απλούστερο ολοκλήρωμα του οποίου γνωρίζουμε τη συμπεριφορά. Για παράδειγμα το ολοκλήρωμα

$$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3+5}}$$

υπάρχει, διότι για $x > 1$,

$$\frac{1}{\sqrt{x^3+5}} < \frac{1}{\sqrt{x^3}} \quad \Rightarrow \quad \int_1^B \frac{dx}{\sqrt{x^3+5}} < \int_1^B \frac{dx}{x^{3/2}}$$

για κάθε $B > 1$, και επειδή

$$\lim_{B \to \infty} \int_1^B \frac{dx}{x^{3/2}} = 2$$

(γιατί;) έπεται ότι το δοθέν ολοκλήρωμα συγκλίνει. Το παράδειγμα αυτό αποτελεί οδηγό για το παρακάτω

Θεώρημα 3. *Έστω f και g τέτοιες ώστε $0 \leq g(t) \leq f(t)$ για $t \geq a$. Αν $\int_a^\infty f$ συγκλίνει, τότε συγκλίνει και το $\int_a^\infty g$.*

Απόδειξη. Αφού ισχύει ότι για κάθε $x > a$

$$\int_a^x g \leq \int_a^x f \leq \int_a^\infty f,$$

προκύπτει αμέσως ότι το όριο $\lim_{x\to\infty} \int_a^x g$ υπάρχει.

- Διατυπώστε την αντιστροφοαντίθετη πρόταση και δώστε ένα παράδειγμα.

- Συνηθισμένα ολοκληρώματα που χρησιμοποιούμε για σύγκριση είναι τα ακόλουθα.

$\int_1^\infty \frac{dt}{t^p}$: συγκλίνει για $p > 1$ και αποκλίνει για $p \leq 1$

$\int_0^1 \frac{dt}{t^p}$: συγκλίνει για $p < 1$ και αποκλίνει για $p \geq 1$

$\int_0^\infty e^{-at}dt$: συγκλίνει για κάθε $a > 0$.

Για παράδειγμα $\int_2^\infty \frac{dt}{\ln t}$ αποκλίνει (θυμηθείτε ότι $0 < lnt < t$ για $t \geq 2$ και συγκρίνετε το ολοκλήρωμα με το $\int_2^\infty \frac{dt}{t}$).

- Εξετάστε αν τα παρακάτω ολοκληρώματα συγκλίνουν

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx, \quad \int_1^\infty \frac{\sin x}{x}dx, \quad \int_1^\infty \frac{dt}{t\sqrt{t}}, \quad \int_0^1 \frac{dt}{t\sqrt{t}}.$$

- Η *συνάρτηση Γάμα* αποτελεί γενίκευση του παραγοντικού ($n! = 1.2\ldots(n-1).n$ και $0! = 1$) και ορίζεται για κάθε $x > 0$ ως

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt.$$

Βρείτε τις τιμές $\Gamma(1), \Gamma(2)$. Ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες δείξτε ότι για κάθε φυσικό αριθμό n, ισχύει $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$. Δείξτε ότι $\Gamma(n+1) = n!$

- Στη στατιστική υπεισέρχεται συχνά η συνάρτηση

$$e^{-ax^2}, \quad a > 0$$

Κάνετε ένα γράφημα της για $a = 0.2$, $a = 1$, $a = 2$ (καμπάνα του Gauss). Ένα φαινομενικά αθώο ολοκλήρωμα, το

$$\int e^{-x^2}dx$$

δεν υπολογίζεται (δηλαδή η e^{-x^2} δεν έχει αντιπαράγωγο που εκφράζεται με στοιχειώδεις συναρτήσεις). Εν τούτοις το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ υπολογίζεται (με κόλπο που θα δούμε στον απειροστικό λογισμό πολλών μεταβλητών) και έχει την τιμή

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Υπολογίστε το $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$ (δεν χρειάζεται σκληρή δουλειά). Θέτουμε

$$I(a) = \int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx$$

και με αλλαγή μεταβλητής βρίσκουμε $I(a) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$. Έτσι μπορούμε να υπολογίσουμε άλλα χρήσιμα ολοκληρώματα, π.χ.

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = -\frac{dI(a)}{da} = \frac{\sqrt{\pi}}{4} a^{-3/2}$$

- Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx, \quad \int_0^{\infty} x^4 e^{-ax^2} dx, \quad \int_0^{\infty} x e^{-ax^2} dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-ax^2} dx$$

2.5 Παραγώγιση ολοκληρωμάτων

Έστω μια 'καλή' συνάρτηση δυο μεταβλητών $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. (Υποθέτουμε ότι $f(x,t)$ και $\partial f/\partial t$ είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμού τους). Τότε το ορισμένο ολοκλήρωμα

$$I(t) = \int_a^b f(x,t)\, dx$$

είναι μια συνάρτηση του t. Η παράγωγος του $I(t)$ δίνεται από τον τύπο

$$\frac{dI}{dt} = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)\, dx.$$

Παραδείγματα. 1) Για το $I(a) = \int_0^1 e^{ax} dx = \frac{1}{a}(e^a - 1)$ έχουμε

$$\frac{d}{da} I(a) = \frac{1 + e^a(a-1)}{a^2}.$$

Από την άλλη,

$$\frac{\partial e^{ax}}{\partial a} = x e^{ax} \quad \text{και} \quad \int_0^1 x e^{ax} dx = \frac{1 + e^a(a-1)}{a^2}.$$

2) $\int_0^{\infty} e^{-ax} dx = \frac{1}{a}$, $a > 0$, άρα

$$\int_0^{\infty} x e^{-ax} dx = -\frac{d}{da}\frac{1}{a} = \frac{1}{a^2}.$$

Όμοια

$$\int_0^{\infty} x^n e^{ax} dx = (-1)^n \frac{d^n}{da^n}\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{n!}{a^{n+1}}.$$

3) Ως γνωστόν το

$$\int \frac{\sin x}{x} dx$$

δεν υπολογίζεται συναρτήσει στοιχειωδών συναρτήσεων. Εν τούτοις, έχουμε

$$I(a) = \int_1^2 \frac{\sin ax}{x} dx, \qquad \frac{dI}{da} = \int_1^2 \cos ax dx = \sin a \frac{2\cos a - 1}{a}.$$

4) Το παρακάτω ολοκλήρωμα συγκλίνει (γιατί;)

$$I(a) = \int_0^\infty \frac{e^{-ax}\sin x}{x} dx, \quad a > 0. \tag{2.5.1}$$

$$\frac{dI}{da} = -\int_0^\infty e^{-ax}\sin x dx = -\frac{1}{1+a^2} \tag{2.5.2}$$

Από την (2.5.1) προκύπτει $\lim_{a\to\infty} I(a) = 0$ και ολοκληρώνοντας την (2.5.2) $I(a) = -\tan^{-1} a + C \Rightarrow 0 = \lim_{a\to\infty} I(a) = -\pi/2 + C$ άρα $C = \pi/2$, συνεπώς

$$I(a) = \int_0^\infty \frac{e^{-ax}\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} a.$$

Παίρνοντας το όριο όταν $a \to 0$, βρίσκουμε ένα ακόμα χρήσιμο ολοκλήρωμα

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Άσκηση. Δείξτε ότι

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \cos ax dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{a^2/4}.$$

2.6 Ασκήσεις

$$\int \sin^2 u du = \frac{u}{2} - \frac{\sin 2u}{4} + C, \quad \int \cos^2 u du = \frac{u}{2} + \frac{\sin 2u}{4} + C, \quad \int \tan^2 u du = \tan u - u + C.$$

Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

1.
$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos t dt, \quad \int_0^2 \frac{6x^2 dx}{\sqrt{2x^3+9}}, \quad \int_{0.5}^1 \frac{\pi}{x^2} \sin(\pi/x) dx, \quad \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - t^2} dt$$

2.
$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^6}}, \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2}, \quad \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}} dx$$

3.
$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin mx \sin nx dx, \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos mx \sin nx dx, \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos mx \cos nx dx, \ n, m \in \mathbb{Z}.$$

4.
$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2}, \int \frac{5x-3}{(x+1)(x-3)}dx, \int \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx$$

5. Ορίζουμε τη συνάρτηση I με τύπο
$$I(t) = \int_0^\infty \frac{e^{-tx}\sin x}{x}dx, \quad t > 0.$$
Δείξτε ότι $dI/dt = -1/\left(1+t^2\right).$

6. Ποιά από τα παρακάτω ολοκληρώματα συγκλίνουν; Υπολογίστε αν είναι δυνατόν την τιμή τους.
$$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}, \int_1^\infty \frac{dx}{x^3}, \int_1^\infty \frac{dx}{1+x^4}, \int_1^\infty \frac{dx}{1+e^x}, \int_0^\infty x^2 e^{-x}dx, \int_1^\infty \frac{dx}{x\ln x}$$

7. Μπορούν τα παρακάτω να είναι και τα δύο σωστά;
$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1}x + C, \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\int -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\cos^{-1}x + C$$

8. Η αντικατάσταση $z = \tan\frac{x}{2}$

Αποδείξτε ότι
$$\cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}, \sin x = \frac{2z}{1+z^2}, \quad dx = \frac{2dz}{1+z^2}.$$
Υπολογίστε τα
$$\int \frac{dx}{\cos x}, \int \frac{dx}{1+\sin x}$$

Κεφάλαιο 3

ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ

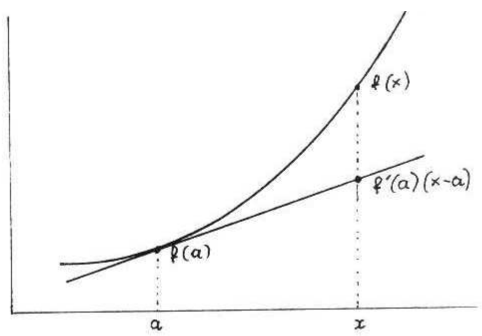
Υπενθυμίζουμε ότι για μια διαφορίσιμη συνάρτηση f σε κάποιο ανοιχτό διάστημα I, αν θεωρήσουμε δυο σημεία a και x ($a < x$) μέσα στο I, τότε υπάρχει ξ μεταξύ των a και x τέτοιο ώστε

$$f(x) = f(a) + f'(\xi)(x-a).$$

Αν το x είναι κοντά στο a, τότε το ξ είναι επίσης κοντά στο a, οπότε περιμένουμε $f'(\xi)$ να είναι κοντά στο $f'(a)$, δηλ $f'(\xi) \simeq f'(a)$. (Αν η παράγωγος συνάρτηση είναι συνεχής στο διάστημα I, αυτό είναι μια εύλογη υπόθεση. Εξηγείστε.) Κατά συνέπεια,

$$\text{Αν } x \text{ κοντά στο } a, \quad f(x) \simeq f(a) + f'(a)(x-a).$$

Άρα το θεώρημα μέσης τιμής επιτρέπει να προσεγγίσουμε γραμμικά μια συνάρτηση αν γνωρί-



ζουμε την τιμή της και την τιμή της παραγώγου της σε ένα σημείο. Αυτή η "σχεδόν ισότητα" λέγεται τοπική γραμμικοποίηση της f κοντά στο a. Για παράδειγμα, η τοπική γραμμικοποίηση της συνάρτησης ημίτονο κοντά στο 0 είναι

$$\sin x \simeq \sin 0 + \sin'(0)(x-0) \quad \Rightarrow \quad \sin x \simeq x,$$

που είναι μια πολύ καλή προσέγγιση (για μικρά x, μέχρι 10 μοίρες, δηλαδή 0.172 ακτίνια, ισχύει ισότητα μέχρι τα τρία πρώτα δεκαδικά ψηφία. Π.χ. 8 μοίρες = 0.1396263 ακτίνια και $\sin 8^0 = 0.1391731$).

- Βρείτε την τοπική γραμμικοποίηση της συνάρτησης e^x κοντά στο 0. Το ίδιο για τις $\sqrt{1+x}$ και $\cos x$. Ελέγξετε (με το κομπιουτεράκι) για ποια x η προσέγγιση είναι καλή μέχρι τρία δεκαδικά ψηφία.

- Οι οικονομολόγοι χρησιμοποιούν τον "κανόνα του 70" για να βρίσκουν σε πόσα χρόνια μια επένδυση με επιτόκιο x διπλασιάζει το αρχικό κεφάλαιο. Σύμφωνα με τον κανόνα αυτό, το κεφάλαιο διπλασιάζεται σε $70/x$ χρόνια. Επιβεβαιώστε τον κανόνα για μικρά x. (Υπόδειξη. Θα χρειαστείτε την τοπική γραμμικοποίηση του $\ln(1+x)$).

3.1 Το Θεώρημα Taylor

Το παράδειγμα της γραμμικοποίησης του συνημιτόνου μας υποβάλλει την ιδέα να προσεγγίσουμε μια συνάρτηση όχι με μια ευθεία αλλά με μια καμπύλη που "στρίβει" κατά τον ίδιο τρόπο με την συνάρτηση. Θα πρέπει λοιπόν στο $x = 0$ τα γραφήματα της αρχικής συνάρτησης f και της προσεγγίζουσας συνάρτησης να έχουν την ίδια κλίση $f'(0)$ και να στρίβουν με τον ίδιο ρυθμό, μ' άλλα λόγια να έχουν την ίδια δεύτερη παράγωγο $f''(0)$. Η απλούστερη συνάρτηση που μπορούμε να δοκιμάσουμε γι' αυτήν την προσέγγιση είναι ένα πολυώνυμο δευτέρου βαθμού,

$$P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2,$$

και να προσδιορίσουμε τους συντελεστές του. Θα πρέπει στο σημείο $x = 0$ να ταυτίζονται οι συναρτήσεις, $f(0) = P_2(0)$, να έχουν την ίδια κλίση, $f'(0) = P_2'(0)$ και ίδια δεύτερη παράγωγο $f''(0) = P_2''(0)$. Από τις τρεις αυτές συνθήκες προκύπτει αμέσως ότι $a_0 = f(0)$, $a_1 = f'(0)$, $a_2 = f''(0)/2$ άρα

$$f(x) \simeq f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2}x^2.$$

Το πολυώνυμο που προσεγγίζει την συνάρτηση κοντά στο 0, λέγεται *πολυώνυμο Taylor 2ου βαθμού*. Μπορείτε να ελέγξετε πόσο καλά προσεγγίζει το συνημίτονο το πολυώνυμο Taylor $1-x^2/2$. Η γενίκευση για προσέγγιση μιας συνάρτησης με πολυώνυμο ανωτέρου βαθμού είναι άμεση. Αν η συνάρτηση έχει μέχρι n τάξης παραγώγους στο 0, τότε μπορεί να προσεγγιστεί με ένα πολυώνυμο n βαθμού

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n.$$

Θα απαιτήσουμε η συνάρτηση f και όλες οι n πρώτες παράγωγοι της στο 0, να συμφωνούν με αυτές του πολυωνύμου P_n. Χωρίς δυσκολία προκύπτει

$$a_0 = f(0), \; a_1 = f'(0), \; a_2 = \frac{f''(0)}{2!}, ..., a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

οπότε μπορούμε να γράψουμε την προσέγγιση της συνάρτησης κοντά στο 0 με το *πολυώνυμο Taylor n-οστού βαθμού*

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,$$

και

$$f(x) \simeq P_n(x).$$

Είναι εύκολο να βρούμε τις προσεγγίσεις με πολυώνυμα Taylor κάποιων γνωστών συναρτήσεων (κάνετε έλεγχο)

$$\begin{aligned}
e^x &\simeq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!}, \\
\sin x &\simeq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \\
\cos x &\simeq 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.
\end{aligned}$$

Για παράδειγμα, αν $x = 0.1$ ακτίνια ($\simeq 5.73^0$), τότε $x^3 = 10^{-3}$ και $x^5 = 10^{-5}$, οπότε καταλαβαίνουμε αμέσως γιατί η γραμμική προσέγγιση του ημιτόνου είναι τόσο καλή για μικρά τόξα. Ο αμέσως επόμενος όρος, $x^3/6$, του πολυωνύμου Taylor επηρεάζει μόνο το τρίτο δεκαδικό ψηφίο στο παράδειγμα μας.

- Προσεγγίστε με πολυώνυμα Taylor τις συναρτήσεις e^{-x}, e^{x^2}, $\sin x^2$ κοντά στο 0. Προσεγγίστε με πολυώνυμα 3ου βαθμού κοντά στο 0 τις

$$\frac{1}{1+x}, \; \frac{1}{1-x}, \; \ln(1+x), \; \sqrt{1+x}.$$

Στην περίπτωση που θέλουμε να προσεγγίσουμε με πολυώνυμο τη συνάρτηση f κοντά σε κάποιο σημείο a διαφορετικό από το 0, ακολουθώντας την ίδια διαδικασία καταλήγουμε

$$f(x) \simeq f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Από την παραπάνω ανάλυση συμπεραίνουμε τα ακόλουθα. Η προσέγγιση της συνάρτησης είναι τόσο καλύτερη όσο μεγαλύτερος είναι ο βαθμός του πολυωνύμου Taylor και όσο κοντύτερα στο a είναι το x. Ποσοτικά αυτό θα εκφράζεται ως εξής. Για μια συνάρτηση f

που έχει παραγώγους κάθε τάξης στο a, για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε x, υπάρχει n τέτοιο ώστε η διαφορά της $f(x)$από το πολυώνυμο Taylor n βαθμού $P_n(x)$ να είναι μικρότερη από ε, $|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon$. Η διαφορά $f(x) - P_n(x)$ λέγεται *υπόλοιπο του τύπου του Taylor* και συμβολίζεται με R_n. Ακριβέστερα, ισχύει το ακόλουθο

Θεώρημα Taylor. *Έστω ότι η f έχει συνεχείς παραγώγους μέχρι τάξης $n+1$ σε κάποιο διάστημα I. Αν a, x ανήκουν στο I, τότε υπάρχει ξ μεταξύ a και x, τέτοιο ώστε*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x),$$

όπου

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Παρατηρήσεις. 1) Για $n = 0$, έχουμε το ΘΜΤ

$$f(x) = f(a) + f'(\xi)(x-a),$$

δηλαδή ο τύπος του Taylor αποτελεί γενίκευση του θεωρήματος μέσης τιμής.

2) Αν όλες οι παράγωγοι της f είναι φραγμένες στο I, δηλαδή για κάποιο $M > 0$ ισχύει $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\left|f^{(n)}(\xi)\right| \le M, \quad \xi \in I$$

τότε

$$|R_n(x)| \le \frac{M|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0 \text{ όταν } n \to \infty.$$

(Θυμηθείτε ότι η ακολουθία $a^n/n!$ είναι μηδενική για κάθε a). Το αποτέλεσμα αυτό εκφράζει το γεγονός ότι προσέγγιση της συνάρτησης είναι τόσο καλύτερη όσο μεγαλύτερος είναι ο βαθμός του πολυωνύμου Taylor.

3) Αν $a = 0$, ο τύπος του Taylor γράφεται

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x),$$

όπου το υπόλοιπο δίνεται από

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

με ξ μεταξύ 0 και x.

Οι περισσότερες συναρτήσεις που συναντούμε στην πράξη έχουν παραγώγους κάθε τάξης σε κάποιο διάστημα, και μάλιστα αυτές είναι φραγμένες. Έτσι από την παρατήρηση (2) συμπεραίνουμε ότι το υπόλοιπο γίνεται οσοδήποτε μικρό για μεγάλα n. Ας δούμε μερικές εφαρμογές.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + R_n(x), \qquad R_n(x) = \frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1},$$

με ξ μεταξύ 0 και x. Άρα το υπόλοιπο φράσσεται

$$|R_n(x)| \leq \frac{e^x |x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

και τείνει στο μηδέν όταν $n \to \infty$. Το φράγμα αυτό επιτρέπει να προσδιορίσουμε πόση προσέγγιση του e έχουμε για π.χ. $n = 5$:

$$R_5(1) \leq \frac{e}{(5+1)!} \leq \frac{3}{6!} = \frac{3}{720} \simeq 0.004,$$

δηλαδή έχουμε σφάλμα μικρότερο του 0.01 όταν γράφουμε

$$e \simeq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} = \frac{326}{120} = 2.716.$$

Για το ημίτονο έχουμε

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n+1}(x),$$

και το υπόλοιπο εύκολα φράσσεται αφού

$$|R_{2n+1}(x)| = \left|\frac{\sin^{(2n+1)}\xi}{(2n+1)!}x^{2n+1}\right| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το $\sin 1$ με ακρίβεια τεσσάρων δεκαδικών ψηφίων (δηλαδή σφάλμα $< 10^{-3}$). Πόσους όρους από το ανάπτυγμα Taylor πρέπει να διατηρήσουμε; Αρκεί το υπόλοιπο να είναι μικρότερο του επιθυμητού σφάλματος, δηλαδή

$$|R_{2n+1}(1)| \leq \frac{1}{(2n+1)!} < 10^{-3},$$

ή $(2n+1)! > 10^3$, άρα $n = 3$.

- Υπολογίστε με προσέγγιση 1/100 το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 \frac{e^t - 1}{t} dt.$$

- Υπολογίστε με προσέγγιση 2 δεκαδικών ψηφίων το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \sin(t^2)\, dt$.

- Υπολογίστε με προσέγγιση 2 δεκαδικών ψηφίων το ολοκλήρωμα $\int_0^{0.5} \frac{\cos x - 1}{x} dx$.

- Βρείτε το ανάπτυγμα Taylor περί το 0 της $f(x) = 1/(1-x)$.

- Δείξτε ότι

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_n(x).$$

  Προσδιορίστε το υπόλοιπο και δείξτε ότι φράσσεται από το $1/(n+1)$ για $x \in [0,1]$.

- Η γεωμετρική πρόοδος με πρώτο όρο το 1 και λόγο $x > 0$

$$1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x}$$

  επιτρέπει να πάρουμε ένα χρήσιμο τύπο:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^{n-1} + \frac{x^n}{1-x},$$

  (ουσιωδώς πρόκειται για τη διαίρεση του πολυωνύμου 1 με το $1-x$). Αν στον τύπο θέσουμε όπου x το $-t$, παίρνουμε

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + ... + (-1)^{n-1} t^{n-1} + \frac{(-1)^n t^n}{1+t}.$$

  Ολοκληρώστε αυτήν την ταυτότητα από 0 μέχρι x για να βρείτε το ανάπτυγμα Taylor της $\ln(1+x)$. Θέσετε στην παραπάνω ταυτότητα όπου t το u^2, ολοκληρώστε από 0 μέχρι x για να βρείτε το ανάπτυγμα Taylor της $\arctan x$.

- Η δυναμική ενέργεια ενός σώματος σε ύψος h από την επιφάνεια της γης δίνεται από τη σχέση

$$U = -G\frac{Mm}{R+h}$$

  όπου m η μάζα του σώματος και M η μάζα της γης. Γιατί για μικρά ύψη (δηλ. $h \ll R = 6400\text{km}$), θεωρείται καλή η προσέγγιση, $U = mgh$;

3.2 Σειρές

Στην παράγραφο αυτή θα εξετάσουμε "αθροίσματα" άπειρων το πλήθος αριθμών, του τύπου

$$x_1 + x_2 + x_3 + ...$$

Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε την ακολουθία των αριθμών $1, x, x^2, x^3, ..., x^{n-1}, ...$ με $x > 0$ και ας σχηματίσουμε το άθροισμα

$$S_n = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^{n-1}.$$

Πρόκειται φυσικά για γεωμετρική πρόοδο με λόγο x, κατά συνέπεια

$$S_n = \frac{1-x^n}{1-x}.$$

Παρατηρούμε ότι αν $0 < x < 1$, ο όρος x^n γίνεται όλο και μικρότερος καθώς το n αυξάνει και περιμένουμε ότι το άθροισμα S_n θα πλησιάζει προς το $1/(1-x)$. Η απόδειξη είναι απλή (θυμηθείτε ότι $\lim_{n\to\infty} \omega^n = 0$ αν $|\omega| < 1$):

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-x^n}{1-x} = \frac{1-\lim_{n\to\infty} x^n}{1-x} = \frac{1}{1-x}.$$

Έχει έννοια λοιπόν να γράψουμε $1+x+x^2+x^3+... = 1/(1-x)$ όπου το συμβολικό άθροισμα των απείρων όρων $1+x+x^2+x^3+...$ είναι το όριο της ακολουθίας $\{S_n\}$ των μερικών αθροισμάτων.

Ορισμός. *Έστω μια ακολουθία πραγματικών αριθμών $\{a_n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Η έκφραση*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

λέγεται σειρά που αντιστοιχεί στην ακολουθία. Το άθροισμα

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + ... + a_n,$$

λέγεται n-οστό μερικό άθροισμα της σειράς και η ακολουθία $\{S_n\}$ λέγεται ακολουθία των μερικών αθροισμάτων. Θα λέμε ότι η σειρά $\sum a_n$ συγκλίνει αν η ακολουθία $\{S_n\}$ συγκλίνει, αν δηλαδή υπάρχει το όριο $\lim_{n\to\infty} S_n$. Στην περίπτωση αυτή, το όριο $\lim S_n$ λέγεται άθροισμα της σειράς.

Η γεωμετρική σειρά που εξετάσαμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + ...,$$

συγκλίνει στον αριθμό $1/(1-x)$ αν $|x| < 1$ και αποκλίνει (απειρίζεται) αν $|x| \geq 1$, διότι στη δεύτερη περίπτωση η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων είναι μη φραγμένη. Έτσι, το παράδοξο του Ζήνωνος θα είχε λυθεί στην εποχή του αν οι Πυθαγόρειοι γνώριζαν ότι

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1 = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 = 1$$

Η *αρμονική σειρά*, $\sum 1/n$, είναι ένα παράδειγμα αποκλίνουσας σειράς

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}_{\geq 1/2} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}}_{\geq 1/2} + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{9} + ... + \frac{1}{16}}_{\geq 1/2} + ...$$

Στις παραπάνω ομάδες όρων, έχουμε διαδοχικά, 2 όρους που ο καθένας είναι μεγαλύτερος του $1/4$, 4 όρους που ο καθένας είναι μεγαλύτερος του $1/8$, 8 όρους που ο καθένας είναι μεγαλύτερος του $1/16$, κλπ. Το κόλπο αυτό μας πείθει ότι δεν είναι πάντα εύκολο να εξετάσουμε αν μια σειρά συγκλίνει, πολύ περισσότερο να βρούμε το άθροισμα της. Διάφορα κριτήρια σύγκλισης έχουν διατυπωθεί τους τελευταίους τρεις αιώνες, από τα οποία εμείς θα γνωρίσουμε μόνο τα εντελώς απαραίτητα.

Θεώρημα 1. *Έστω $\{a_n\}$ μια ακολουθία μή αρνητικών όρων ($a_n \geq 0$ για κάθε n). Η σειρά $\sum a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων είναι φραγμένη.*

Απόδειξη. Άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 4 της εισαγωγής.

Το κριτήριο αυτό χρησιμοποιήσαμε ήδη σιωπηρά για να αποδείξουμε ότι η αρμονική σειρά δεν συγκλίνει. Ακόμα πιο βασικό είναι το

Θεώρημα 2 (Κριτήριο σύγκρισης). *Έστω ότι $0 \leq a_n \leq b_n$ για κάθε n. Αν η σειρά $\sum b_n$ συγκλίνει, τότε συγκλίνει και η $\sum a_n$.*

Απόδειξη. Τα μερικά αθροίσματα

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n, \quad U_n = b_1 + b_2 + ... + b_n$$

ικανοποιούν την

$$0 \leq S_n \leq U_n \quad \text{για κάθε } n,$$

και αφού η $\{U_n\}$ είναι φραγμένη (γιατί;), έπεται ότι και η $\{S_n\}$είναι φραγμένη. Κατά συνέπεια η σειρά $\sum a_n$ συγκλίνει.

Για παράδειγμα η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + \sin^3(n+1)}{2^n + n^2}$$

συγκλίνει διότι

$$0 \leq \frac{2 + \sin^3(n+1)}{2^n + n^2} \leq \frac{3}{2^n},$$

και γνωρίζουμε ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n} = 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

συγκλίνει (γεωμετρική).

Παρατήρηση. Η συνθήκη $0 \leq a_n \leq b_n$ μπορεί να αντικατασταθεί από την $0 \leq a_n \leq Cb_n$ όπου $C > 0$.

Συνέπεια του κριτηρίου σύγκρισης είναι το

Θεώρημα 3 (Κριτήριο του λόγου). *Έστω* $\sum a_n$ *μια σειρά μή αρνητικών όρων και* c *ένας αριθμός* $0 < c < 1$*, τέτοιος ώστε* $a_{n+1} \leq ca_n$ *για κάθε* n*. Τότε η σειρά* $\sum a_n$ *συγκλίνει.*

Απόδειξη. Θα συγκρίνουμε τη σειρά $\sum a_n$ με τη γεωμετρική σειρά. Έχουμε

$$a_n \leq ca_{n-1} \leq c^2 a_{n-2} \leq ...c^n a_0.$$

άρα το μερικό άθροισμα S_n γράφεται

$$S_n = a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_n \leq a_0 \left(1 + c + c^2 + ... + c^n\right)$$

Σύγκριση με τη γεωμετρική σειρά δείχνει ότι η $\sum a_n$ συγκλίνει. Πράγματι,

$$1 + c + c^2 + ... + c^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} c^n = \frac{1}{1-c},$$

άρα η ακολουθία $\{S_n\}$ φράσσεται από τον αριθμό $1/(1-c)$.

Παρατήρηση. Ο απλούστερος τρόπος εφαρμογής του κριτηρίου του λόγου είναι η εξέταση του ορίου του λόγου δυο διαδοχικών όρων της σειράς. Έτσι έχουμε:

$$\text{Αν} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \quad \text{η σειρά αποκλίνει,}$$

$$\text{Αν} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \quad \text{η σειρά συγκλίνει,}$$

$$\text{Αν} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 \quad \text{δεν μπορούμε να αποφανθούμε.}$$

Ως εφαρμογή θα δείξουμε ότι η σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

συγκλίνει. Πράγματι έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0,$$

και από το κριτήριο του λόγου προκύπτει ότι η σειρά συγκλίνει. Θα δείξουμε αργότερα ότι το όριο της σειράς είναι ο αριθμός e, η βάση των φυσικών λογαρίθμων.

- Εξετάστε αν οι παρακάτω σειρές συγκλίνουν

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \quad p > 0$$

3.3 Δυναμοσειρές και σειρές Taylor

Δυναμοσειρά με κέντρο το 0 λέγεται κάθε σειρά της μορφής

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Παράδειγμα δυναμοσειράς είναι η

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...$$

(δηλ. $a_n = 1/n!$). Από το κριτήριο του λόγου, γνωρίζουμε ότι μια σειρά συγκλίνει όταν το όριο του λόγου δυο διαδοχικών όρων της, είναι μικρότερο του 1. Στην περίπτωση μας λοιπόν, η δυναμοσειρά θα συγκλίνει αν

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1} x}{a_n} \right| < 1.$$

Αν θέσουμε

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|,$$

τότε η δυναμοσειρά συγκλίνει για $-R < x < R$ *και αποκλίνει για* $|x| > R$. Η περίπτωση $x = R$, πρέπει να εξεταστεί ιδιαίτερα. Ο αριθμός R λέγεται *ακτίνα σύγκλισης* της δυναμοσειράς. Ας δούμε μερικά παραδείγματα.

1) Για την πιο πάνω δυναμοσειρά, $\sum x^n/n!$, βρίσκουμε

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty,$$

δηλαδή η δυναμοσειρά αυτή συγκλίνει για κάθε $x \in (-\infty, +\infty)$.

2) Όμοια μπορούμε να δείξουμε ότι οι δυναμοσειρές

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ..., \qquad 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ...,$$

συγκλίνουν για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- Ποιά είναι η ακτίνα σύγκλισης των δυναμοσειρών

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n^2}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} n x^n.$$

Ιδιαίτερη σημασία έχουν οι *σειρές Taylor*, δηλαδή δυναμοσειρές της μορφής

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + f'(0)\, x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + ...$$

όπου f είναι μια συνάρτηση που έχει παραγώγους κάθε τάξης. Η σειρά Taylor συγκλίνει, αν για κάθε x σε κάποιο διάστημα $(-R, R)$, το υπόλοιπο του τύπου του Taylor μηδενίζεται καθώς $n \to \infty$. Έτσι θα έχουμε

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n, \qquad x \in (-R, R).$$

(Γράψετε αναλυτικά τα βήματα της απόδειξης).

- Για όλες τις συναρτήσεις των οποίων είχαμε γράψει τον τύπο του Taylor (εκθετική, ημίτονο, συνημίτονο, λογαριθμική, $1/(1-x)$, $\sqrt{1+x}$, κλπ), μπορούμε να δείξουμε ότι $\lim R_n(x) = 0$, για x σε κάποιο διάστημα $(-R, R)$. (Παρατηρείστε ότι σε όλες τις περιπτώσεις η n-οστή παράγωγος είναι φραγμένη, δηλ. υπάρχει $M > 0 : f^{(n)}(x) \leq M$ για κάθε n και για κάθε x σε κάποιο διάστημα $(-R, R)$). Κατά συνέπεια, οι αντίστοιχες σειρές Taylor συγκλίνουν στο $(-R, R)$ και αναπαριστούν τις συναρτήσεις αυτές.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι έχουμε μια συγκλίνουσα δυναμοσειρά $\sum a_n x^n$, με ακτίνα σύγκλισης R. Μπορούμε να αντιστοιχίσουμε σε κάθε x στο διάστημα $(-R, R)$, τον αριθμό $\sum a_n x^n$, με άλλα λόγια, η δυναμοσειρά ορίζει μια συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \sum a_n x^n, \quad x \in (-R, R).$$

Πόσο καλές ιδιότητες έχει μια συνάρτηση ορισμένη μέσω δυναμοσειράς; Αποδεικνύεται ότι στο διάστημα $(-R, R)$, η συνάρτηση αυτή είναι ολοκληρώσιμη, συνεχής και παραγωγίσιμη. Ακριβέστερα,

Αν $f(x) = \sum a_n x^n, \quad x \in (-R, R)$, τότε για x στο διάστημα $(-R, R)$ ισχύουν:

$$\begin{aligned} \int f(x)\,dx &= \sum \frac{a_n x^{n+1}}{n+1} + C, \\ f'(x) &= \sum n a_n x^{n-1}. \end{aligned}$$

Δηλαδή *μπορούμε να παραγωγίσουμε και να ολοκληρώσουμε μια δυναμοσειρά όρο προς όρο* (στο διάστημα που αυτή συγκλίνει, δηλ για $|x|$ μικρότερο της ακτίνας σύγκλισης).

Για παράδειγμα, η σειρά

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... = \cos x,$$

είναι η παράγωγος της σειράς

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... = \sin x,$$

ενώ η $\sum x^n/n!$ είναι η παράγωγος του εαυτού της.

Το παραπάνω θεώρημα επιτρέπει να βρούμε τη σειρά Taylor μιας συνάρτησης με απλή ολοκλήρωση ή παραγώγιση της σειράς μιας άλλης γνωστής συνάρτησης. Ας δούμε μερικές εφαρμογές.

Για την $f(t) = 1/(1+t)$, $t \in (-1,1)$, γνωρίζουμε ότι η σειρά Taylor είναι

$$1 - t + t^2 - t^3 + ...$$

Ολοκληρώνοντας έχουμε

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x \left(1 - t + t^2 - t^3 + ...\right) dt \quad \Rightarrow \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ...$$

Όμοια, με ολοκλήρωση της

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + ..., \qquad t \in (-1,1)$$

παίρνουμε την σειρά Taylor της arctan,

$$\arctan x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + ..., \qquad x \in (-1,1).$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση f που για $x \in (-1,1)$ ορίζεται ως

$$f(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3.2} + \frac{x^4}{4.3} - \frac{x^5}{5.4} + ...$$

Παραγωγίζοντας έχουμε

$$f'(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ...$$

άρα $f(x) = (x+1)[\ln(1+x) - 1]$.

Ιδού μια ερώτηση που θα τρόμαζε και τον πιο χαλκέντερο λάτρη των πράξεων: Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}.$$

Ποια είναι η 7η παράγωγος της στο 0; Γράφοντας τη σειρά Taylor της f,

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \frac{x^8}{9!} - ...$$

βλέπουμε αμέσως ότι $f^{(7)}(0) = 0$.

- Δείξτε ότι

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad \cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x2^n}{(2n)!}.$$

- Υπολογίστε το άθροισμα $f(x)$της σειράς
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} nx^{n-1}$$
(Υποδ. Η μορφή κάθε όρου δηλώνει ότι η f έχει προέλθει από παραγώγιση κάποιας δυναμοσειράς. Ολοκληρώστε λοιπόν την f από 0 μέχρι x).

Μια από τις σημαντικότερες σειρές Taylor είναι η *διωνυμική σειρά*. Για τη συνάρτηση $f(x) = (1+x)^p$ όπου $p \in \mathbb{R}$ και $x \in (-1,1)$, έχουμε διαδοχικά

$f'(x) = p(1+x)^{p-1}$ άρα $f'(0) = p$

$f''(x) = p(p-1)(1+x)^{p-2}$ άρα $f''(0) = p(p-1)$

$f'''(x) = p(p-1)(p-2)(1+x)^{p-3}$ άρα $f'''(0) = p(p-1)(p-2)$, κλπ. Αποδεικνύεται ότι το υπόλοιπο Taylor, $R_n(x)$, τείνει στο 0 όταν $n \to \infty$, άρα η σειρά Taylor της f είναι
$$(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}x^3 + ... \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} x^n$$
όπου ο διωνυμικός συντελεστής ορίζεται *για κάθε* $p \in \mathbb{R}$ ως
$$\begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} = \frac{p(p-1)(p-2)...(p-n+1)}{n!}, \qquad \begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$
Αν p είναι θετικός ακέραιος, τότε παίρνουμε το διωνυμικό θεώρημα της άλγεβρας. (Όταν το n φτάσει στην τιμή $p+1$, ο διωνυμικός συντελεστής μηδενίζεται, οπότε η σειρά "τερματίζει". Στη συνέχεια, θέτοντας $x = b/a$, έχουμε το διωνυμικό θεώρημα στην οικεία του μορφή).

- Αναλόγως της τιμής του p μπορούμε να πάρουμε διάφορες σειρές Taylor. Για παράδειγμα, θέσετε $p = -1$ και θα βρείτε αμέσως το ανάπτυγμα σε σειρά της $1/(1+x)$ (γεωμετρική). Με παρόμοιο τρόπο βρείτε τη σειρά Taylor της $\sqrt{1+x}$.

Η αξία της διωνυμικής σειράς δεν έγκειται στο ότι παρέχει τη σειρά Taylor γνωστών συναρτήσεων με κατάλληλη εκλογή του p. Υπάρχουν περιπτώσεις που ο υπολογισμός των παραγώγων στο 0 είναι επίπονος και η εύρεση του γενικού τύπου για τη n-οστή παράγωγο στο 0 σχεδόν αδύνατος. Για παράδειγμα, αν θέσουμε $x = -t^2$ και $p = -1/2$, θα έχουμε για $t \in (-1,1)$,
$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = 1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1.3}{2.4}t^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}t^6 + ...$$
και ολοκληρώνοντας
$$\arcsin x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7} + ...$$

- Γράψτε τους τρεις πρώτους όρους των σειρών Taylor των συναρτήσεων

$$\frac{1}{(1+x)^2}, \quad \frac{1}{(1+x)^3}$$

(Περιπτώσεις διωνυμικής ή παραγωγίστε την $1/(1+x)$).

$$\sqrt{1-x}, \quad \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

Είναι πιθανό να έχει δημιουργηθεί η εντύπωση ότι οι σειρές Taylor είναι μια ειδική περίπτωση δυναμοσειρών με $a_n = f^{(n)}(0)/n!$ για κάποια f. Στην πραγματικότητα *κάθε συγκλίνουσα δυναμοσειρά είναι μια σειρά Taylor*. Η απόδειξη είναι απλή. Θεωρείστε τη δυναμοσειρά

$$f(x) = \sum a_n x^n$$

και υπολογίστε διαδοχικά τις πρώτες k παραγώγους. Εύκολα προκύπτει ότι $f^{(k)}(0) = k!a_k$, δηλαδή

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}.$$

Δυο λόγια για δυναμοσειρές με κέντρο κάποιον αριθμό a διάφορο του μηδενός. Αυτές έχουν τη μορφή

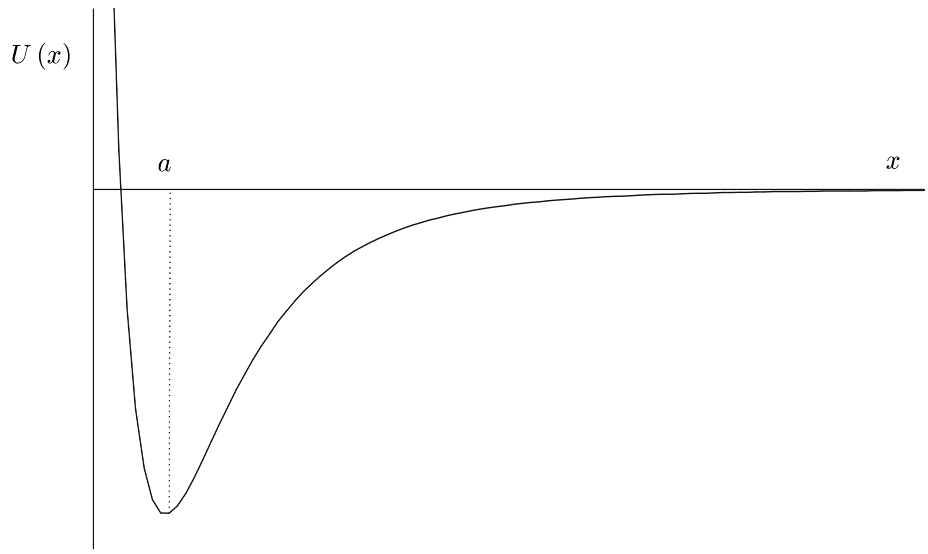
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n.$$

Ισχύουν οι ίδιες προτάσεις που γνωρίσαμε για τις δυναμοσειρές με κέντρο το 0 με κάποιες προφανείς τροποποιήσεις, π.χ. αν η ακτίνα σύγκλισης είναι R, τότε η σειρά συγκλίνει στο διάστημα $(a-R, a+R)$. Η σειρά Taylor μιας συνάρτησης f (που έχει παραγώγους κάθε τάξης και το υπόλοιπο $R_n(x) \to 0$ όταν $n \to \infty$) γράφεται

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots$$

3.4 Εφαρμογές στη Φυσική.

1. Η αλληλεπίδραση δυο ατόμων περιγράφεται από το διάγραμμα ενέργειας σε συνάρτηση με την απόσταση. Όταν τα άτομα είναι απομακρυσμένα η δυναμική τους ενέργεια είναι αμελητέα. Όταν όμως πλησιάσουν πολύ, η απωστική δύναμη των ηλεκτρονικών τους νεφών κάνει τη μεταξύ τους ενέργεια πολύ μεγάλη. Σε κάποια ορισμένη απόσταση a, η δυναμική ενέργεια είναι ελάχιστη, και αν το πηγάδι του δυναμικού είναι βαθύ, είναι δυνατός ο σχηματισμός μορίου. Ανάλογο είναι και το διάγραμμα ενέργειας μεταξύ δυο μορίων που αλληλεπιδρούν με



δυνάμεις van-der Waals. Αναπτύσσοντας την δυναμική ενέργεια U σε σειρά Taylor γύρω στο a, θα έχουμε

$$U(x) = U(a) + U'(a)(x-a) + \frac{U''(a)}{2}(x-a)^2 + ...$$

Ο όρος $U(a)$ είναι σταθερή ποσότητα και καθορίζει το επίπεδο αναφοράς για τη μέτρηση της δυναμικής ενέργειας. Μπορεί λοιπόν να ληφθεί ίσος με 0 (όπως για παράδειγμα θεωρούμε ότι η δυναμική ενέργεια ενός σώματος στην επιφάνεια της γης είναι 0). Ο δεύτερος όρος είναι 0 διότι το a είναι σημείο ακροτάτου της συνάρτησης, άρα $U'(a) = 0$. Ο επόμενος όρος, δείχνει ότι η δυναμική ενέργεια κοντά στο a, είναι προσεγγιστικά η ενέργεια ενός αρμονικού ταλαντωτή, δηλαδή

$$U(x) \simeq \frac{1}{2}k(x-a)^2$$

με το κέντρο της δύναμης στο σημείο a. Το αποτέλεσμα αυτό είναι σημαντικό για δυο λόγους: Πρώτον, η μορφή της συνάρτησης $U(x)$ είναι ποιοτικά ίδια για όλα τα άτομα, κατά συνέπεια η συμπεριφορά της κοντά στο σημείο ελαχίστου, είναι ίδια για όλα τα άτομα. Δεύτερον, η προσέγγιση του δυναμικού κοντά στο a με τετραγωνικό δυναμικό, δείχνει ότι τα άτομα ενός διατομικού μορίου ταλαντεύονται με συχνότητα που εξαρτάται από την δεύτερη παράγωγο $U''(a)$, δηλαδή τη "σταθερή k του ελατηρίου". Αν γνωρίζουμε το φάσμα απορρόφησης του αερίου, βγάζουμε χρήσιμες πληροφορίες για τη μορφή της συνάρτησης $U(x)$ κοντά στο a.

2. Ένα ηλεκτρικό δίπολο αποτελείται από δυο φορτία Q και $-Q$ που απέχουν απόσταση d. Η ένταση E του ηλεκτρικού πεδίου στην ευθεία του διπόλου και σε απόσταση $r \gg d$, είναι αντιστρόφως ανάλογη του κύβου της απόστασης r.

Πράγματι, η ένταση (σε κατάλληλο σύστημα μονάδων) δίνεται από τη σχέση

$$E = \frac{Q}{r^2} + \frac{-Q}{(r+d)^2}.$$

Επειδή $d/r < 1$, έχουμε (διωνυμική)

$$\frac{1}{(r+d)^2} = \frac{1}{r^2(1+d/r)^2} = \frac{1}{r^2}\left(1 - 2\frac{d}{r} + 3\frac{d^2}{r^2} - 4\frac{d^3}{r^3} + ...\right)$$

Άρα η ένταση E γράφεται

$$E = \frac{Q}{r^2}\left[1 - \left(1 - 2\frac{d}{r} + 3\frac{d^2}{r^2} - 4\frac{d^3}{r^3} + ...\right)\right] = \frac{Q}{r^2}\left(2\frac{d}{r} - 3\frac{d^2}{r^2} + 4\frac{d^3}{r^3} - ...\right).$$

Παραλείποντας ανώτερες δυνάμεις του d/r, έχουμε

$$E \simeq \frac{2Qd}{r^3}.$$

Σε βιβλίο Φυσικής, θα βλέπατε την εξής παρουσίαση: "Σε προσέγγιση πρώτης τάξης", ή "Επειδή d/r είναι μικρό, οι όροι με δυνάμεις του d/r είναι αμελητέοι, άρα"

$$\frac{1}{r^2}\left(1+\frac{d}{r}\right)^{-2} = \frac{1}{r^2}\left(1 - 2\frac{d}{r} + \text{ terms in } \frac{d^2}{r^2}\right).$$

Συνοψίζουμε την ορολογία. Υποθέτουμε ότι η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ έχει παραγώγους κάθε τάξης.

1. Πολυώνυμο *Taylor* n βαθμού της f γύρω από το 0:

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

2. Σειρά *Taylor* της f γύρω από το 0:

$$f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k.$$

3. Προσσέγγιση της f με πολυώνυμο

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

4. Θεώρημα *Taylor* (βλέπε κεφ. 3). Άλλοι τρόποι γραφής:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)\,h + R_1(x,h)\,, \text{ με } \lim_{h\to 0}\frac{R_1(x,h)}{h} = 0,$$

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\,\Delta x,$$

$$f(x+\Delta x) = f(x) + f'(x)\,\Delta x + \mathcal{O}\left(\Delta x^2\right),$$

$$f(x+\Delta x) = f(x) + f'(x)\,\Delta x + \mathcal{O}(2)\,.$$

Κεφάλαιο 4

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

4.1 Ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}^3$

Είναι γνωστό ότι τα σημεία του επιπέδου μπορούν να παρασταθούν ως διατετεταγμένα ζεύγη αριθμών. Αν θεωρήσουμε το διάνυσμα $\mathbf{u}$ με αρχή την αρχή O των αξόνων και τέλος το σημείο (u_1, u_2), παρατηρούμε ότι σε κάθε σημείο του επιπέδου, αντιστοιχεί ένα διάνυσμα. Θα λέμε ότι *οι συντεταγμένες του διανύσματος* $\mathbf{u}$ είναι οι αριθμοί u_1 και u_2 και θα γράφουμε $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ ή $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$, όπου $\mathbf{i}$ και $\mathbf{j}$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα κατά μήκος των αξόνων x και y αντίστοιχα, δηλαδή $\mathbf{i} = (1, 0)$ και $\mathbf{j} = (0, 1)$.

Με όμοιο τρόπο τα σημεία του χώρου παριστάνονται από διατετεταγμένες τριάδες αριθμών (u_1, u_2, u_3). Το διάνυσμα $\mathbf{u}$ με αρχή την αρχή O των αξόνων και τέλος το σημείο (u_1, u_2, u_3) γράφεται ως

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3), \qquad \text{ή ως} \quad \mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k},$$

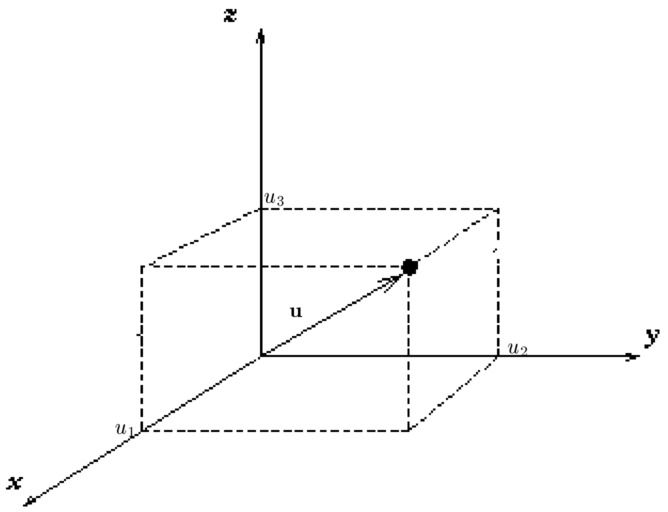
όπου $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$, $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$. Οι αριθμοί u_1, u_2, u_3 λέγονται *συντεταγμένες του διανύσματος* $\mathbf{u}$.

Το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών (u_1, u_2) με $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$, είναι το καρτεσιανό γινόμενο $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ και συμβολίζεται με $\mathbb{R}^2$. Όμοια το σύνολο των διατεταγμένων τριάδων (u_1, u_2, u_3) πραγματικών αριθμών, δηλαδή το καρτεσιανό γινόμενο $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, συμβολίζεται με $\mathbb{R}^3$. Δυο διανύσματα $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ είναι ίσα, αν έχουν τις ίδιες συντεταγμένες. Το μηδενικό διάνυσμα, $\mathbf{0}$, έχει μηδενικές συντεταγμένες, $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$. *Άθροισμα των διανυσμάτων* $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ και $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, ορίζεται ως

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3).$$

Πολλαπλασιασμός με βαθμωτό $\lambda \in \mathbb{R}$, ορίζεται ως

$$\lambda\mathbf{u} = (\lambda u_1, \lambda u_2, \lambda u_3).$$



Με τις δυο αυτές πράξεις, το σύνολο $\mathbb{R}^3$ αποκτά την αλγεβρική δομή ενός *διανυσματικού χώρου*, έχει δηλαδή τις ακόλουθες ιδιότητες. (Με $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ συμβολίζουμε στοιχεία του $\mathbb{R}^3$ και με λ, μ πραγματικούς αριθμούς).

ΔΧ 1 Αν $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$ ανήκουν στο $\mathbb{R}^3$ τότε και $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ ανήκει επίσης στο $\mathbb{R}^3$.

ΔΧ 2 Για όλα τα στοιχεία $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ του $\mathbb{R}^3$ ισχύει $\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{y}+\mathbf{x}$.

ΔΧ 3 $\lambda\mathbf{x}$ ανήκει στο $\mathbb{R}^3$.

ΔΧ 4 $(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z}=\mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z})$.

ΔΧ 5 Υπάρχει ένα στοιχείο του $\mathbb{R}^3$ που συμβολίζεται με $\mathbf{0}$ τέτοιο ώστε για κάθε στοιχείο $\mathbf{x}$ του $\mathbb{R}^3$ να ισχύει $\mathbf{x}+\mathbf{0}=\mathbf{x}$.

ΔΧ 6 Για κάθε $\mathbf{x}$ στο $\mathbb{R}^3$ υπάρχει ένα στοιχείο $-\mathbf{x}$ τέτοιο ώστε $\mathbf{x}+(-\mathbf{x})=\mathbf{0}$.

ΔΧ 7 $\lambda(\mathbf{x}+\mathbf{y})=\lambda\mathbf{x}+\lambda\mathbf{y}$.

ΔΧ 8 $(\lambda+\mu)\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{x}$.

ΔΧ 9 $(\lambda\mu)\mathbf{x}=\lambda(\mu\mathbf{x})$.

ΔΧ 10 $1\mathbf{x}=\mathbf{x}$. (1 είναι ο αριθμός 1).

4.2 Εσωτερικό γινόμενο

Η έννοια του εσωτερικού γινομένου διανυσμάτων του επιπέδου, μεταφέρεται αβίαστα και σε διανύσματα του χώρου. Έτσι, αν $\mathbf{u}=(u_1,u_2,u_3)$ και $\mathbf{v}=(v_1,v_2,v_3)$ είναι στοιχεία του $\mathbb{R}^3$, το *εσωτερικό γινόμενο* $\mathbf{u}.\mathbf{v}$, είναι ο πραγματικός αριθμός

$$\mathbf{u}.\mathbf{v}=u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3.$$

Από τον ορισμό, προκύπτουν αμέσως οι ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου (κάνετε έλεγχο):

Αν $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ είναι στοιχεία του $\mathbb{R}^3$ και με λ είναι πραγματικός αριθμός τότε

ΕΓ 1 $\mathbf{u}.\mathbf{u} \geq 0$, και $\mathbf{u}.\mathbf{u} = 0$ αν και μόνο αν $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

ΕΓ 2 $\mathbf{u}.\mathbf{v} = \mathbf{v}.\mathbf{u}$.

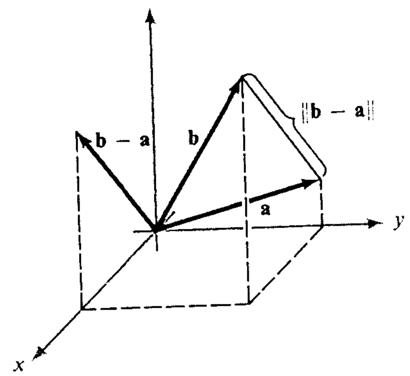
ΕΓ 3 $(\lambda \mathbf{u}).\mathbf{v} = \lambda(\mathbf{u}.\mathbf{v})$.

ΕΓ 4 $\mathbf{u}.(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u}.\mathbf{v} + \mathbf{u}.\mathbf{w}$

Το εσωτερικό γινόμενο $\mathbf{u}.\mathbf{u} = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$ έχει άμεση γεωμετρική ερμηνεία γιατί σχετίζεται με το μήκος (ή μέτρο) του διανύσματος $\mathbf{u}$, που είναι $\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$. Το μήκος του διανύσματος $\mathbf{u}$ συμβολίζεται με $|\mathbf{u}|$ και ονομάζεται *norm* του $\mathbf{u}$. Έτσι έχουμε

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u}.\mathbf{u}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}.$$

Οι μαθηματικοί συμβολίζουν συχνά με $||\mathbf{u}||$ τη norm του $\mathbf{u}$, και οι φυσικοί απλά με u.



- Δείξτε ότι $\mathbf{i}.\mathbf{i} = \mathbf{j}.\mathbf{j} = \mathbf{k}.\mathbf{k} = 1$ και $\mathbf{i}.\mathbf{j} = \mathbf{i}.\mathbf{k} = \mathbf{j}.\mathbf{k} = 0$. Κατά συνέπεια τα $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ είναι αμοιβαίως κάθετα και έχουν norm 1, γι' αυτό λέγονται ορθοκανονικά διανύσματα.

- Στο σχήμα φαίνεται ότι το διάνυσμα $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ είναι παράλληλο και ίσου μήκους με το ευθύγραμμο τμήμα από το άκρο του $\mathbf{b}$ στο άκρο του $\mathbf{a}$. Κατά συνέπεια, η απόσταση από το άκρο του $\mathbf{b}$ στο άκρο του $\mathbf{a}$ είναι $|\mathbf{b} - \mathbf{a}|$. Ποια είναι η απόσταση του $\mathbf{i}$ από το $\mathbf{j}$;

Θεώρημα 1. *Αν θ είναι η γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ του $\mathbb{R}^3$ $(0 \leq \theta \leq \pi)$, τότε*

$$\mathbf{u}.\mathbf{v} = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| \cos\theta.$$

Απόδειξη. Από το νόμο του συνημιτόνου έχουμε

$$|\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2\,|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| \cos\theta.$$

Το πρώτο μέλος γράφεται

$$(\mathbf{u}-\mathbf{v}).(\mathbf{u}-\mathbf{v}) = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2\mathbf{u}.\mathbf{v},$$

οπότε προκύπτει αμέσως η αποδεικτέα.

Το θεώρημα αυτό συνδέει τον στοιχειώδη ορισμό του εσωτερικού γινομένου που παρέχεται στη μέση εκπαίδευση με τον δικό μας ορισμό. Παρατηρείστε ότι για την απόδειξη χρησιμοποιήσαμε μόνο τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου. Ακόμα, το θεώρημα αυτό καθιστά εύλογο τον ορισμό: *Δύο μη μηδενικά διανύσματα είναι κάθετα αν το εσωτερικό τους γινόμενο είναι μηδέν.* Θα γράφουμε $\mathbf{u}\perp\mathbf{v}$ αν $\mathbf{u}.\mathbf{v} = 0$.

- Ποιά γωνία σχηματίζουν τα διανύσματα $\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ και $\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$;

Πόρισμα 1 (**Θεώρημα του Πυθαγόρα**). *Αν* $\mathbf{u}$ *και* $\mathbf{v}$ *είναι κάθετα, τότε*

$$|\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 .$$

Απόδειξη. $|\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2 = (\mathbf{u}+\mathbf{v}).(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 + 2\mathbf{u}.\mathbf{v} = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2$, διότι $\mathbf{u}.\mathbf{v} = 0$.

Πόρισμα 2 (**Ανισότητα Schwarz**). *Για όλα τα διανύσματα* $\mathbf{u}$ *και* $\mathbf{v}$ *του* $\mathbb{R}^3$ *ισχύει*

$$|\mathbf{u}.\mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\| ,$$

με ισότητα μόνο αν ένα από αυτά είναι μηδέν, ή αν το ένα είναι πολλαπλάσιο του άλλου.

(Παρατηρήστε ότι εδώ συμβολίσαμε με $\|.\|$ τη norm, δοθέντος ότι στο πρώτο μέλος εμφανίζεται η απόλυτη τιμή του εσωτερικού γινομένου).

Απόδειξη. Αν ένα από τα διανύσματα είναι μηδέν, τότε ισχύει η ισότητα $0 = 0$. Αν $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v}$ τότε $\theta = 0$ ή π, οπότε ισχύει πάλι ισότητα διότι $|\cos\theta| = 1$. Αν το ένα δεν είναι πολλαπλάσιο του άλλου, τότε $|\cos\theta| < 1$.

Πόρισμα 3 (**Τριγωνική ανισότητα**). *Για όλα τα διανύσματα* $\mathbf{u}$ *και* $\mathbf{v}$ *του* $\mathbb{R}^3$ *ισχύει*

$$|\mathbf{u}+\mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}| .$$

Απόδειξη. Ισχύει

$$|\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 + 2\mathbf{u}.\mathbf{v} \leq |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 + 2\,|\mathbf{u}.\mathbf{v}|$$

και από την ανισότητα Schwarz έχουμε ότι

$$|\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 + 2\,|\mathbf{u}.\mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 + 2\,|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| = (|\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|)^2 ,$$

επομένως
$$|\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2 \leq (|\mathbf{u}|+|\mathbf{v}|)^2 .$$
Επειδή και οι δυο παραστάσεις που είναι υψωμένες στο τετράγωνο είναι μη αρνητικές, προκύπτει αμέσως η τριγωνική ανισότητα. (Προς ελάφρυνση του συμβολισμού αποφεύγουμε να συμβολίσουμε με $\|.\|$ τη norm. Σημειώνουμε πάλι τη διαφορετική σημασία του συμβόλου $|.|$ στις παραστάσεις $|\mathbf{u}.\mathbf{v}|$ και $|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|$.)

Παρατήρηση. Τα ορθοκανονικά διανύσματα $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ παράγουν το χώρο $\mathbb{R}^3$, με την έννοια ότι κάθε διάνυσμα $\mathbf{u}$ γράφεται με μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, δηλαδή
$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$$
Λέμε ότι τα $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ αποτελούν μια *ορθοκανονική βάση* του χώρου. Οι συντεταγμένες u_1, u_2, u_3 εκφράζονται με τη βοήθεια του εσωτερικού γινομένου του διανύσματος $\mathbf{u}$ με τα στοιχεία της βάσης. Πράγματι,
$$u_1 = \mathbf{u}.\mathbf{i}$$
διότι $\mathbf{i}.\mathbf{j} = \mathbf{i}.\mathbf{k} = 0$ και όμοια $u_2 = \mathbf{u}.\mathbf{j}$, $u_3 = \mathbf{u}.\mathbf{k}$. Συμπεραίνουμε ότι *σε χώρο με εσωτερικό γινόμενο οι συντεταγμένες* u_1, u_2, u_3 *είναι οι συνιστώσες του διανύσματος* $\mathbf{u}$ *κατά μήκος των διανυσμάτων της βάσης.*

Γενικότερα, τρία (μη μηδενικά) αμοιβαίως κάθετα διανύσματα $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ *παράγουν* το χώρο $\mathbb{R}^3$, με την έννοια ότι κάθε διάνυσμα $\mathbf{u}$ γράφεται με μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, δηλαδή
$$\mathbf{u} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3.$$
Λέμε ότι τα $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ αποτελούν μια *ορθογώνια βάση* του χώρου (όχι ορθοκανονική, εκτός αν τα $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ έχουν norm ίση με 1). Οι *συνιστώσες* a_1, a_2, a_3 *κατά μήκος των διανυσμάτων* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ εκφράζονται και πάλι με τη βοήθεια του εσωτερικού γινομένου του διανύσματος $\mathbf{u}$ με τα στοιχεία της βάσης. Πράγματι, παίρνοντας το εσωτερικό γινόμενο του $\mathbf{u}$ με το $\mathbf{e}_1$ έχουμε
$$\mathbf{u}.\mathbf{e}_1 = (a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3).\mathbf{e}_1 = a_1\mathbf{e}_1.\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2.\mathbf{e}_1 + a_3\mathbf{e}_3.\mathbf{e}_1 = a_1\mathbf{e}_1.\mathbf{e}_1,$$
άρα
$$a_1 = \frac{\mathbf{u}.\mathbf{e}_1}{|\mathbf{e}_1|^2}, \quad a_2 = \frac{\mathbf{u}.\mathbf{e}_2}{|\mathbf{e}_2|^2}, \quad a_3 = \frac{\mathbf{u}.\mathbf{e}_3}{|\mathbf{e}_3|^2}.$$
Επαναλαμβάνουμε λοιπόν ότι για τυχόντα διανύσματα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{e}$, ο αριθμός
$$c = \frac{\mathbf{u}.\mathbf{e}}{|\mathbf{e}|^2}$$
λέγεται *συνιστώσα* του $\mathbf{u}$ κατά μήκος του $\mathbf{e}$ και το διάνυσμα $c\mathbf{e}$, λέγεται *προβολή* του $\mathbf{u}$ πάνω στο $\mathbf{e}$.

4.3 Εξωτερικό γινόμενο

Το *εξωτερικό ή διανυσματικό γινόμενο* δυο διανυσμάτων του $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ και $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, ορίζεται ως

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\, \mathbf{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\, \mathbf{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\, \mathbf{k},$$

ή συμβολικά

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Από τον ορισμό προκύπτουν αμέσως οι ακόλουθες ιδιότητες. (Ως συνήθως $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ συμβολίζουν στοιχεία του $\mathbb{R}^3$ και λ, μ πραγματικούς αριθμούς).

(1) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$

(2) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}, \quad (\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \boldsymbol{\lambda} (\mathbf{a} \times \mathbf{b})\,.$

Συνεπώς έχουμε $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$, για κάθε διάνυσμα $\mathbf{a}$ λόγω της (1). Ακόμα,

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k},\ \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}.$$

Ας εξετάσουμε τώρα το εσωτερικό γινόμενο του $\mathbf{c}$ με το $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Εύκολα βρίσκουμε

$$\mathbf{c}.\,(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Από τις ιδιότητες των οριζουσών συμπεραίνουμε ότι $\mathbf{a}.\,(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$ και $\mathbf{b}.\,(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$, πράγμα που σημαίνει ότι *το εξωτερικό γινόμενο* $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ *είναι κάθετο και στο* $\mathbf{a}$ *και στο* $\mathbf{b}$, *άρα είναι κάθετο στο επίπεδο που ορίζουν τα* $\mathbf{a}$ *και* $\mathbf{b}$. Ποιο είναι το μέτρο του εξωτερικού γινομένου δυο διανυσμάτων $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$; Έχουμε

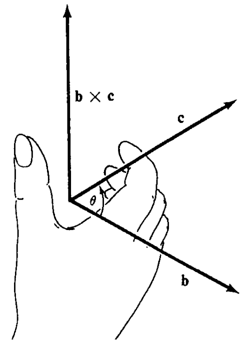
$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_3 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}^2.$$

Εκτελούμε τις πράξεις και βρίσκουμε

$$\begin{aligned} |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 &= \left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right) \left(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2\right) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 \\ &= |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a}.\mathbf{b})^2 = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \cos^2 \theta, \end{aligned}$$

άρα

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}|\, |\mathbf{b}|\, |\sin \theta|\,.$$



Συνοψίζοντας: Το εξωτερικό γινόμενο $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ είναι κάθετο στο επίπεδο που ορίζουν τα $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$ και το μέτρο του είναι $|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\,|\sin\theta|$. Η φορά του βρίσκεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού.

- α) Δείξτε ότι αν $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b} + \mu\mathbf{c}$, τότε $\mathbf{a}.(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = 0$.

- β) Δείξτε ότι το γινόμενο $\mathbf{a}.(\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ παραμένει αναλλοίωτο σε κυκλική εναλλαγή των $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$.

- γ) Δείξτε τις παρακάτω ιδιότητες του τριπλού διανυσματικού γινομένου:

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a}.\mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a}.\mathbf{b})\mathbf{c},$$

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{c}\times(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + \mathbf{b}\times(\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = 0.$$

- δ) Δείξτε ότι $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}).(\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a}.\mathbf{c})(\mathbf{b}.\mathbf{d}) - (\mathbf{a}.\mathbf{d})(\mathbf{b}.\mathbf{c})$.

- ε) Δείξτε ότι το μέτρο του εξωτερικού γινομένου, $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$, παριστάνει το εμβαδό του παραλληλογράμμου με πλευρές τα διανύσματα $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$. Η απόλυτη τιμή του $\mathbf{a}.(\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ παριστάνει τον όγκο του παραλληλεπιπέδου με ακμές τα διανύσματα $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ και $\mathbf{c}$.

- στ) Βρείτε ένα μοναδιαίο διάνυσμα, ορθογώνιο προς τα διανύσματα $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ και $\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

- Εξηγείστε γιατί οι παρακάτω παραστάσεις είναι ασαφείς ή εσφαλμένες

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \times \mathbf{c},\ \mathbf{ab},\ \mathbf{a}.(\mathbf{b}.\mathbf{c}),\ \mathbf{a} \times (\mathbf{b}.\mathbf{c}),\ \mathbf{a}.\mathbf{b}.\mathbf{c},\ \mathbf{a} + \mathbf{a}.\mathbf{c},\ \ \mathbf{a}.\mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}.$$

Θα τελειώσουμε με την περιγραφή του επιπέδου με τις διανυσματικές τεχνικές που μέχρι τώρα αναπτύξαμε. Η εξίσωση ευθείας στο επίπεδο είναι $Ax + By + D = 0$. Γενικεύοντας, σε τρεις διαστάσεις, η εξίσωση $Ax + By + Cz + D = 0$ θα παριστάνει επίπεδο. Για να το δείξουμε, ας θεωρήσουμε ένα επίπεδο Π που περνά από το σημείο $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ και έστω

$\mathbf{N} = (A, B, C)$ ένα διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο Π. Ένα σημείο $\mathbf{r} = (x, y, z)$ ανήκει στο επίπεδο, αν το διάνυσμα $\mathbf{r} - \mathbf{a}$ είναι κάθετο στο $\mathbf{N}$ (κάνετε σχήμα), δηλαδή αν

$$(\mathbf{r} - \mathbf{a}) . \mathbf{N} = 0,$$

ή $\mathbf{r}.\mathbf{N} = \mathbf{a}.\mathbf{N}$, ισοδύναμα αν

$$Ax + By + Cz = Aa_1 + Ba_2 + Ca_3.$$

Επειδή το δεύτερο μέλος της εξίσωσης αυτής είναι σταθερό, έστω $-D$, καταλήγουμε στην εξίσωση του επιπέδου

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

- Για παράδειγμα, η εξίσωση του επιπέδου που περιέχει το σημείο $(1, 0, 0)$ και είναι κάθετο στο $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ δίνεται από την εξίσωση $x + y + z = 1$.

4.4 Ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}^n$

Το σύνολο των διατεταγμένων n-άδων πραγματικών αριθμών $(x_1, \ldots, x_n)$ συμβολίζεται με $\mathbb{R}^n$ και λέγεται n-διάστατος Ευκλείδειος χώρος. Τα στοιχεία του $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ λέγονται σημεία του $\mathbb{R}^n$, ή n-διανύσματα. Όπως και στην περίπτωση του τριδιάστατου Ευκλείδειου χώρου, ορίζουμε άθροισμα των διανυσμάτων $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ και $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n),$$

και πολλαπλασιασμό με βαθμωτό λ

$$\lambda \mathbf{x} = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).$$

Με τις δυο αυτές πράξεις, το σύνολο $\mathbb{R}^n$ αποκτά την αλγεβρική δομή ενός διανυσματικού χώρου, έχει δηλαδή τις ιδιότητες ΔΧ1 έως ΔΧ10. Τα n διανύσματα $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, \mathbf{e}_n = (0, 0, \ldots, 1)$, λέγονται *συνήθη διανύσματα βάσης*, και κάθε διάνυσμα $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός τους,

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + \ldots + x_n \mathbf{e}_n.$$

Η έννοια του εσωτερικού γινομένου διανυσμάτων επεκτείνεται αβίαστα και στον n-διάστατο Ευκλείδειο χώρο. Έτσι, αν $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ και $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ είναι στοιχεία του $\mathbb{R}^n$, το *εσωτερικό γινόμενο* $\mathbf{x}.\mathbf{y}$ (ή $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$) είναι ο πραγματικός αριθμός

$$\mathbf{x}.\mathbf{y} = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n.$$

Από τον ορισμό, προκύπτουν αμέσως οι ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου ΕΓ1 – ΕΓ4 (κάνετε έλεγχο).

Το εσωτερικό γινόμενο επιτρέπει να ορίσουμε norm ενός n-διανύσματος $\mathbf{x}$

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{\mathbf{x}.\mathbf{x}} = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Θεώρημα 2. (**Ανισότητα Cauchy-Schwarz**) *Για όλα τα διανύσματα* $\mathbf{x}$ *και* $\mathbf{y}$ *του* $\mathbb{R}^n$ *ισχύει*

$$|\mathbf{x}.\mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\| ,$$

με ισότητα μόνο αν ένα από αυτά είναι μηδέν, ή αν το ένα είναι πολλαπλάσιο του άλλου.

Απόδειξη. Θέτουμε $\mu = \mathbf{x}.\mathbf{y}$ και $\lambda = -\mathbf{y}.\mathbf{y}$. Λόγω της θετικότητας του εσωτερικού γινομένου θα έχουμε

$$0 \leq (\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}) . (\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}) = \lambda^2\mathbf{x}.\mathbf{x} + \mu^2\mathbf{y}.\mathbf{y} + 2\lambda\mu\mathbf{x}.\mathbf{y}.$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των λ και μ,

$$0 \leq (\mathbf{y}.\mathbf{y})^2 (\mathbf{x}.\mathbf{x}) + (\mathbf{x}.\mathbf{y})^2 (\mathbf{y}.\mathbf{y}) - 2 (\mathbf{x}.\mathbf{y})^2 (\mathbf{y}.\mathbf{y}) .$$

Αν $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, το θεώρημα είναι προφανές. Αν $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$, μπορούμε να διαιρέσουμε με $\mathbf{y}.\mathbf{y}$, οπότε βρίσκουμε

$$0 \leq (\mathbf{y}.\mathbf{y}) (\mathbf{x}.\mathbf{x}) - (\mathbf{x}.\mathbf{y})^2$$

και παίρνοντας ριζικά προκύπτει η ζητούμενη ανισότητα.

- Ως συνέπεια μπορούμε να δείξουμε ότι η norm, έχει τις εξής ιδιότητες:

N1	$\forall\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$	$|\mathbf{x}| \geq 0$ και $|\mathbf{x}| = 0$ ανν $\mathbf{x} = \mathbf{0}$
N2	$\forall\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ και $\lambda \in \mathbb{R}$	$|\lambda\mathbf{x}| = |\lambda| \, |\mathbf{x}|$
N3	$\forall\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$	$|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$

Ποια είναι η σημασία της norm; Εφοδιάζει τον $\mathbb{R}^n$ με μια απόσταση: Η απόσταση των σημείων $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ είναι ο αριθμός $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$. Η απόσταση με τη σειρά της, επιτρέπει να πούμε πότε δυο σημεία $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ είναι "κοντά", με άλλα λόγια επιτρέπει να ορίσουμε όριο, συνέχεια, παράγωγο κλπ. Έτσι οι αλγεβρικές ιδιότητες του $\mathbb{R}^n$ (διανυσματικός χώρος) σε συνδυασμό με την έννοια της απόστασης, επιτρέπουν να αναπτύξουμε τον απειροστικό λογισμό του $\mathbb{R}^n$.

4.5 Διανυσματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής

Θεωρούμε ένα σωματίδιο που κινείται στο επίπεδο όπου έχουμε ορίσει ένα σύστημα συντεταγμένων. Τη στιγμή t, έστω $x(t)$ και $y(t)$ οι απομακρύνσεις του σωματιδίου από την αρχή $(0,0)$ στους αντίστοιχους άξονες. Το ζεύγος των συναρτήσεων $(x(t), y(t))$ αποτελεί την *παραμετρική αναπαράσταση της τροχιάς* του σωματιδίου. Με άλλα λόγια, το διάνυσμα θέσης, $\mathbf{r}$, του κινητού τη στιγμή t, θα γράφεται

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)), \quad \text{ή} \quad \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}, \qquad t \in [t_1, t_2]\,.$$

Γενικώς συναρτήσεις του τύπου $\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^n$ όπου I είναι κάποιο διάστημα πραγματικών αριθμών και $n = 2, 3$ ονομάζονται *καμπύλες* στο επίπεδο ή στον τριδιάστατο χώρο.

Παραδείγματα **A** Αν $t \in \mathbb{R}$ και $\mathbf{a}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ σταθερά διανύσματα, τότε $\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{v}$ έχει ως εικόνα την ευθεία που περνά από το σημείο $\mathbf{a}$ και έχει τη διεύθυνση του διανύσματος $\mathbf{v}$.

B Η καμπύλη $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ με $x(t) = a\cos t$ και $y(t) = a\sin t$ όπου $a > 0$ και $t \in [0, 2\pi]$, είναι παραμετρική αναπαράσταση κύκλου κέντρου $(0,0)$ και ακτίνας a. (Υψώστε στο τετράγωνο και προσθέστε κατά μέλη για να πεισθείτε).

Γ Η καμπύλη $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ με $x(t) = a\cos\omega t$ και $y(t) = a\sin\omega t$ όπου $a > 0$, $\omega < 0$ και $t \in [0, 2\pi/\omega]$, είναι παραμετρική αναπαράσταση του ίδιου κύκλου, αλλά το διάνυσμα θέσης "κινείται" με αντίθετο προσανατολισμό και διαφορετική ταχύτητα.

Απαλοίφοντας το χρόνο στα δύο τελευταία παραδείγματα, προκύπτει η *αλγεβρική αναπαράσταση* του κύκλου αυτού, $x^2 + y^2 = a^2$. Συμπεραίνουμε ότι ενώ η η αλγεβρική αναπαράστση είναι μοναδική, μία καμπύλη μπορεί να έχει πολλές παραμετρικές αναπαραστάσεις. Τι παριστάνει η καμπύλη $\mathbf{r}(t) = (\cos t^2, \sin t^2)$, $t \in [0, \sqrt{2\pi}]$;

Δ Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, συνάρτηση μιας μεταβλητής. Το γράφημα της είναι μια καμπύλη C που αλγεβρικά παρίσταται από την $y = f(x)$, δηλαδή

$$C = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\right\}.$$

Μία παραμετρική αναπαράσταση της C, είναι $x(t) = t$ και $y(t) = f(t)$.

E Η καμπύλη $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ με $x(t) = (v_0\cos\theta)\,t$ και $y(t) = (v_0\sin\theta)\,t - \frac{1}{2}gt^2$ όπου $v_0, g > 0$ και $\theta \in [0, \pi/2]$, είναι παραμετρική αναπαράσταση της τροχιάς βλήματος που βάλλεται υπό γωνία ως προς τον ορίζοντα. Απαλοίφοντας το χρόνο από τις $x(t)$ και $y(t)$ προκύπτει η αλγεβρική αναπαράσταση της τροχιάς

$$y = \tan\theta\, x - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}x^2,$$

που είναι παραβολή.

ΣΤ Η καμπύλη $\mathbf{r}(t) = (a\cos\omega t, a\sin\omega t, vt)$, όπου $a, v, \omega > 0$, $t \in [0, 6\pi/\omega]$ είναι παραμετρική αναπαράσταση έλικας με σταθερό βήμα $2\pi v/\omega$.

Παράγωγος μιας διανυσματικής συνάρτησης $\mathbf{r} : t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$ στο σημείο t είναι το διάνυσμα

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}\,(t + \Delta t) - \mathbf{r}\,(t)}{\Delta t},$$

αρκεί φυσικά να υπάρχει το όριο. (Για κινούμενα γραφικά:

$http : //www.usd.edu/\tilde{}jflores/MultiCalc02/WebBook/Chapter\_14/Graphics/Chapter14\_2/$
$Hmtm14\_2/14.2\%20Derivatives\%20and\%20Integrals\%20of\%20Vector\%20Functions.htm$

Εύκολα προκύπτει ότι στην περίπτωση αυτή οι πραγματικές συναρτήσεις $x(t), y(t), z(t)$ είναι παραγωγίσιμες και μάλιστα

$$\dot{\mathbf{r}}\,(t) \equiv \frac{d\mathbf{r}}{dt} = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)).$$

Το διάνυσμα $\dot{\mathbf{r}}\,(t)$ είναι παράλληλο στην ευθεία που εφάπτεται στην καμπύλη στο σημείο $\mathbf{r}\,(t)$.

Για παράδειγμα, ένα σωμάτιο που κινείται στην ελικοειδή τροχιά $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in \mathbb{R}$, έχει ταχύτητα $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}\,(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$ που το μέτρο της είναι $|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{2}$.

Με ανάλογο τρόπο ορίζεται ως επιτάχυνση η δεύτερη παράγωγος, $\ddot{\mathbf{r}} = d^2\mathbf{r}/dt^2 = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t), \ddot{z}(t))$ (εφ' όσον οι συναρτήσεις $x(t), y(t)$ και $z(t)$ είναι δυο φορές παραγωγίσιμες).

Για παράδειγμα, το διάνυσμα θέσης ενός σωματιδίου που εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση (διαλέγουμε σύστημα αξόνων ώστε το κέντρο του κύκλου να είναι το σημείο $(0, 0)$), γράφεται

$$\mathbf{r}(t) = a\cos\omega t\ \mathbf{i} + a\sin\omega t\ \mathbf{j}, \qquad a, \omega > 0.$$

Η ταχύτητα θα είναι λοιπόν

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}\,(t) = -\omega a\sin\omega t\ \mathbf{i} + \omega a\cos\omega t\ \mathbf{j}.$$

Το μέτρο της είναι σταθερό, $|\mathbf{v}(t)| = a\omega$. Η επιτάχυνση

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \omega^2 a\cos\omega t\ \mathbf{i} - \omega^2 r\sin\omega t\ \mathbf{j} = -\omega^2\mathbf{r}(t),$$

είναι αντίρροπη της διανυσματικής ακτίνας, κατά συνέπεια είναι κάθετη στην ταχύτητα. (Γενικά, *αν μια διανυσματική συνάρτηση* $\mathbf{v}$ *έχει σταθερή norm, τότε είναι ορθογώνια στην παράγωγο της,* $\dot{\mathbf{v}}$. *Απόδειξη*: Παραγωγίζοντας την $|\mathbf{v}(t)^2| = \mathbf{v}(t).\mathbf{v}(t) = \text{const}$, έχουμε $2\dot{\mathbf{v}}(t).\mathbf{v}(t) = 0$, ο.ε.δ.)

Το γινόμενο πραγματικής συνάρτησης λ επί διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{r}$ είναι μια νέα διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{q} = \lambda\mathbf{r}$ που ορίζεται ως, $\mathbf{q}(t) = \lambda(t)\mathbf{r}(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Η παράγωγος της $\mathbf{q}$ δίνεται από τον τύπο $\dot{\mathbf{q}}(t) = \dot{\lambda}(t)\mathbf{r}(t) + \lambda(t)\dot{\mathbf{r}}(t)$. Με ανάλογο τρόπο, για δυο διανυσματικές συναρτήσεις $\mathbf{r}$ και $\mathbf{p}$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}.\mathbf{p}) = \dot{\mathbf{r}}.\mathbf{p} + \mathbf{r}.\dot{\mathbf{p}}, \quad \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}}.$$

Ασκήσεις

- 1. Έστω $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{c} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$. Βρείτε τις προβολές των $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$ πάνω στο $\mathbf{c}$. Βρείτε τα

$$\mathbf{a}.(\mathbf{b} \times \mathbf{c}), (\mathbf{a} \times \mathbf{b}).\mathbf{c}, \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}), (\mathbf{a} \times \mathbf{b}).(\mathbf{a} \times \mathbf{c}), (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} \times \mathbf{c}).$$

2. Βρείτε παραμετρικές αναπαραστάσεις $\mathbf{r}(t)$ των παρακάτω καμπυλών: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = e^x\}$, ευθεία που περνά από τα σημεία $(1, 1, 1)$ και $(2, 3, 2)$, έλικα ακτίνας 2 και βήματος $1/3$.

3. Υπολογίστε τα μήκη των καμπυλών

$$\mathbf{r}(t) = \left(2\cos t, 2\sin t, \sqrt{3}t\right), \ t \in [0, 3\pi], \quad \mathbf{r}(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t, 0), \ t \in [0, 2\pi].$$

4. Δυο διανύσματα $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ του επιπέδου ορίζονται με πολικές συντεταγμένες ως (θ_1, r_1) και (θ_2, r_2). Αν το $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}$ ορίζεται ως (θ, r), πως συνδέονται τα (θ, r) με τα $(\theta_1, r_1), (\theta_1, r_1)$;

5. Γράψτε την εξίσωση ευθείας που περνά από το σημείο $(0, 1, 2)$ και έχει τη διεύθυνση του διανύσματος $\mathbf{v} = (1, 1, 3)$.

6. Αν $\mathbf{a}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ και $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$, τότε $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

7. Αν $\mathbf{a}.\mathbf{b} = 0$ και $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$, τότε ένα τουλάχιστον από τα $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ είναι μηδέν.

8. Έστω $\mathbf{a} = (2, -1, 2)$ και $\mathbf{b} = (3, 4, -1)$. Βρείτε διάνυσμα $\mathbf{c}$ ώστε $\mathbf{a} \times \mathbf{c} = \mathbf{b}$.

9. Αν $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα τότε $\mathbf{a}.(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = 0$ και αντίστροφα.

10. Βρείτε ένα μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στα $(1, 1, 1)$ και $(2, 3, -1)$.

11. Βρείτε δυο κάθετα διανύσματα και κάθετα στο $(2, 3, -1)$.

12. Αποδείξτε την ταυτότητα $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 - \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2 = 4\mathbf{a}.\mathbf{b}$. Για ποιά διάσταση ισχύει;

13. Υπενθυμίζουμε ότι η εξίσωση του επιπέδου που περνά από το σημειο $\mathbf{a}$ και είναι κάθετο στο διάνυσμα $\mathbf{n}$ γράφεται

$$(\mathbf{x} - \mathbf{a}).\mathbf{n} = 0.$$

Ένα επίπεδο έχει εξίσωση $x + 2y - 2z + 7 = 0$. Βρείτε: α) ένα μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα β) τα σημεία τομής με τους άξονες γ) την απόσταση του επιπέδου από την αρχή δ) τις συντεταγμένες του σημείου του επιπέδου που έχει την ελάχιστη απόσταση από τη αρχή.

14. Υπενθυμίζουμε ότι η εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημειο $\mathbf{a}$ και έχει τη διεύθυνση του διανύσματος $\mathbf{u}$ γράφεται

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{u} + \mathbf{a}.$$

Δείξτε ότι αυτή μπορεί εν γένει να γραφεί ως $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$. Βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημειο $\mathbf{a}$ και είναι κάθετη στο επίπεδο με εξίσωση $4x - 3y + z = 5$.

15. Βρείτε ένα διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο που περνά από τα σημεία $(0,2,2)$, $(2,0,-1)$ και $(3,4,0)$.

16. Βρείτε τη διανυσματική ταχύτητα και το μέτρο της στις παρακάτω καμπύλες

$$\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + \mathbf{t}j + \mathbf{k}, \quad \mathbf{r}(t) = (a\cos t, b\sin t, 0), \qquad \mathbf{r}(t) = t\mathbf{u} + \mathbf{a},$$

όπου a, b σταθερές και $\mathbf{u}, \mathbf{a}$ σταθερά διανύσματα.

4.6 Πίνακες, Γραμμικά Συστήματα, Ορίζουσες

Ένας $m \times n$ πίνακας A, είναι μια ορθογώνια διάταξη αριθμών με m γραμμές και n στήλες

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Το στοιχείο της i γραμμής και j στήλης είναι το a_{ij}. Πολλές φορές για λόγους οικονομίας γράφουμε τον πίνακα A ως

$$A = (a_{ij}), \quad i = 1, 2, ..., n, \quad j = 1, 2, ..., m.$$

Η j-στήλη συμβολίζεται με $\mathbf{A}^j$ και συνήθως λέγεται διάνυσμα j-στήλης (θεωρούμενη ως μια m-άδα αριθμών, είναι ένα στοιχείο του $\mathbb{R}^m$),

$$\mathbf{A}^j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}.$$

Όμοια η i-γραμμή συμβολίζεται με $\mathbf{A}_i$ και συνήθως λέγεται διάνυσμα i-γραμμής (θεωρούμενη ως μια n-άδα αριθμών, είναι ένα στοιχείο του $\mathbb{R}^n$),

$$\mathbf{A}_i = (a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}) \, .$$

Για παράδειγμα, ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

έχει ως στήλες τα διανύσματα

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Έτσι, το διάνυσμα γραμμής $(x_1, x_2, ..., x_n)$είναι ένας $1 \times n$ πίνακας και το διάνυσμα στήλης

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$

είναι ένας $m \times 1$ πίνακας.

Προφανείς έννοιες είναι οι ακόλουθες. Ένας πίνακας λέγεται *τετραγωνικός* αν $m = n$. Ένας πίνακας λέγεται *μηδενικός* αν όλα τα στοιχεία του είναι μηδέν. Συμβολίζεται με O. Ένας τετραγωνικός πίνακας λέγεται *διαγώνιος* αν όλα τα στοιχεία του, εκτός αυτών της διαγωνίου του είναι μηδέν,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22} & ... & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Ορίζουμε άθροισμα πινάκων που έχουν ίδιο μέγεθος με τον ακόλουθο τρόπο. Αν $A = (a_{ij})$ και $B = (b_{ij})$ είναι δυο $m \times n$ πίνακες, τότε

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \, , \qquad i = 1, ..., n, \quad j = 1, ..., m.$$

Για παράδειγμα

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Προφανώς $A + O = A$, για οποιοδήποτε πίνακα A ίδιου μεγέθους με τον O.

Ορίζουμε πολλαπλασιασμό του πίνακα με βαθμωτό $\lambda \in \mathbb{R}$ ως εξής. Ο πίνακας λA έχει ως στοιχεία του τα στοιχεία του A πολλαπλασιασμένα με λ,

$$\lambda A = (\lambda a_{ij}) .$$

Για παράδειγμα αν A είναι όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, τότε

$$(-1)\,A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ονομάζουμε *ανάστροφο* του $m \times n$ πίνακα και τον συμβολίζουμε με $A^T = (b_{ij})$, τον $n \times m$ πίνακα που έχει ως γραμμές τις στήλες του A, δηλαδή

$$A^T = (b_{ij}) = (a_{ji}) .$$

Για παράδειγμα αν A είναι όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, τότε

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας λέγεται *συμμετρικός* αν

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad i, j = 1, ..., n.$$

Προφανώς ένας συμμετρικός πίνακας είναι ίσος με τον ανάστροφο του.

Τέλος, ο μοναδιαίος πίνακας, ή πίνακας μονάδα I, είναι ένας διαγώνιος πίνακας που όλα τα διαγώνια στοιχεία του είναι 1,

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{bmatrix}.$$

Έστω $A = (a_{ij})$ ένας $m \times n$ πίνακας και $B = (b_{ij})$ ένας $n \times r$ πίνακας. Ορίζουμε ως *γινόμενο* τους AB ένα $m \times r$ πίνακα $C = (c_{ij})$ που τα στοιχεία του είναι

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}, \qquad i = 1, ..., m, \;\; j = 1, ..., r.$$

Σχηματικά, το στοιχείο c_{ij} προκύπτει ως εσωτερικό γινόμενο της $i-$γραμμής του πίνακα A με την $j-$ στήλη του πίνακα B. Για παράδειγμα,

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -5 \\ -5 & -10 \end{bmatrix}.$$

Ο λόγος που ορίζεται έτσι το γινόμενο πινάκων θα γίνει αντιληπτός όταν θα δούμε τη γεωμετρική σημασία τους στη Γραμμική Άλγεβρα.

Ιδιότητες του γινομένου:

(1) *Εν γένει το γινόμενο πινάκων δεν είναι μεταθετικό*, δηλαδή

$$AB \neq BA.$$

(2) *Το γινόμενο είναι επιμεριστικό*

$$A\,(BC) = (AB)\,C.$$

(3) *Ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα ως προς την πρόσθεση*

$$A(B + C) = AB + AC$$

Οίκοθεν νοείται ότι στις παραπάνω ισότητες, οι πράξεις ορίζονται. Για παράδειγμα στην (2) A, B μπορούν να πολλαπλασιαστούν και B, C μπορούν να πολλαπλασιαστούν. Έτσι, αν A είναι κάποιος $m \times n$ πίνακας, ο B πρέπει να έχει τη μορφή ενός $n \times r$ πίνακα και ο C πρέπει να είναι ένας $r \times s$ πίνακας.

Ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας A λέγεται *αντιστρέψιμος*, αν υπάρχει ένας $n \times n$ πίνακας B τέτοιος ώστε

$$AB = BA = I_n.$$

Ο πίνακας B λέγεται *αντίστροφος* του A και συμβολίζεται με A^{-1}. Ο αντίστροφος ενός πίνακα, αν υπάρχει, είναι μοναδικός. Ένας απλός τρόπος προσδιορισμού του αντιστρόφου πίνακα, είναι η λύση του συστήματος $AA^{-1} = I$. Για παράδειγμα, αν

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

αρκεί να προσδιορίσουμε ένα πίνακα

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$$

τέτοιο ώστε

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Αρκεί λοιπόν να λύσουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} 2x - z &= 1, \\ 2y - w &= 0, \\ 5x + 3z &= 0, \\ 3w + 5y &= 1. \end{aligned}$$

Από τη λύση του συστήματος προκύπτει ότι

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{11} & \frac{1}{11} \\ -\frac{5}{11} & \frac{2}{11} \end{bmatrix}.$$

Παρατηρήσεις. Η γεωμετρική ερμηνεία που μπορούμε να δώσουμε στους πίνακες ειναι η η εξής. Ένας τυχών $m \times n$ πίνακας A, δρα πάνω σε ένα διάνυσμα $\mathbf{x}$ του $\mathbb{R}^n$ και παράγει ένα διάνυσμα $\mathbf{y}$ του $\mathbb{R}^m$, $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$. Λέμε ότι ο πίνακας A είναι μια *γραμμική απεικόνιση* από τον $\mathbb{R}^n$ στον $\mathbb{R}^m$, διότι:

(α) Για οποιαδήποτε διανύσματα $\mathbf{x}_1$ και $\mathbf{x}_2$,

$$A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = A\mathbf{x}_1 + A\mathbf{x}_2,$$

(β) Για κάθε πραγματικό αριθμό λ και κάθε διάνυσμα $\mathbf{x}$,

$$A(\lambda \mathbf{x}) = \lambda A\mathbf{x}.$$

Ειδικώς, ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας A, δρα πάνω σε ένα διάνυσμα $\mathbf{x}$ του $\mathbb{R}^n$ και παράγει ένα νέο διάνυσμα $\mathbf{y}$ του $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$. Εν γένει, το νέο διάνυσμα διαφέρει από το παλιό και στο μέτρο και στην κατεύθυνση. Π.χ. όταν ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

δράσει πάνω στο διάνυσμα $\mathbf{x} = (1,1)^T$, παράγει το διάνυσμα

$$\mathbf{y} = A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Θεωρούμε το το ομογενές σύστημα m εξισώσεων με n αγνώστους, $x_1, \ldots, x_n$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ &\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

που γράφεται και ως ή $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, ή χρησιμοποιώντας τα διανύσματα στήλης $\mathbf{A}^j$, ως

$$x_1\mathbf{A}^1 + x_2\mathbf{A}^2 + ... + x_n\mathbf{A}^n = \mathbf{b} \tag{4.6.1}$$

Ας υποθέσουμε ότι $m = n$ και ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος. Τότε η λύση του συστήματος είναι

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}.$$

Όπως θα δείξουμε στη Γραμμική Άλγεβρα, η λύση αυτή είναι μοναδική.

Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Η ορίζουσα του είναι ο αριθμός $ad - bc$ και συμβολίζεται με $\det A$. Γράφουμε

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Αν $\mathbf{A}^1$ και $\mathbf{A}^2$ είναι οι δυο στήλες του A, χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $\det A = D(\mathbf{A}^1, \mathbf{A}^2)$ για την ορίζουσα του. Οι παρακάτω ιδιότητες προκύπτουν με απλό υπολογισμό.

Ο1 *Ως συνάρτηση των διανυσμάτων στήλης* $\mathbf{A}^j$, *η ορίζουσα είναι γραμμική.* Τούτο σημαίνει ότι

$$\det \begin{bmatrix} a + a' & b \\ c + c' & d \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a' & b \\ c' & d \end{bmatrix},$$

$$\det \begin{bmatrix} \lambda a & b \\ \lambda c & d \end{bmatrix} = \lambda \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Ο2 *Αν δυο στήλες είναι ίσες, η ορίζουσα είναι μηδέν.*

Ο3 *Η ορίζουσα του μοναδιαίου πίνακα είναι 1.*

Ο4 *Η ορίζουσα μπορεί να αναπτυχθεί κατά στήλες ή γραμμές, άρα* $\det A = \det A^T$.

Ο5 *Αν εναλλάξουμε τις δυο στήλες, η ορίζουσα αλλάζει πρόσημο.*

Ο6 *Αν προσθέσουμε ένα βαθμωτό πολλαπλάσιο μιας στήλης σε μια άλλη στήλη, η ορίζουσα δεν αλλάζει.*

Η ορίζουσα ενός 3×3 πίνακα A ορίζεται ως

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Αν $\mathbf{A}^1$, $\mathbf{A}^2$, και $\mathbf{A}^3$ είναι οι στήλες του A, χρησιμοποιούμε πάλι το συμβολισμό $\det A = D(\mathbf{A}^1, \mathbf{A}^2, \mathbf{A}^3)$ για την ορίζουσα του. Μπορούμε πάλι να δείξουμε ότι ισχύουν οι ιδιότητες O1-O6. Για παράδειγμα, το πρώτο μέρος της O1 σημαίνει ότι αν

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

είναι οποιοδήποτε διάνυσμα στήλης, τότε,

$$D(\mathbf{A}^1 + \mathbf{b}, \mathbf{A}^2, \mathbf{A}^3) = D(\mathbf{A}^1, \mathbf{A}^2, \mathbf{A}^3) + D(\mathbf{b}, \mathbf{A}^2, \mathbf{A}^3)$$

4.7 Ασκήσεις

1. Έστω I ο $n \times n$ πίνακας μονάδα και A ένας $n \times r$ πίνακας. Βρείτε τον IA.

2. Αν A, B τετραγωνικοί πίνακες ισχύει ότι $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$;

3. Έστω
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$
Βρείτε τους A^2, A^3. Γενικεύσετε για 4×4 πίνακες.

4. Έστω
$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}.$$
Βρείτε τους A^2, A^3.

5. Έστω $R(\theta)$ ο πίνακας στροφής
$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$
Δείξτε ότι $R(\theta_1)R(\theta_2) = R(\theta_1 + \theta_2)$. Βρείτε τον $R(\theta)^2$. Δείξτε ότι ο $R(\theta)$ έχει αντίστροφο και βρείτε τον. Αν το διάνυσμα $\mathbf{x} = (1, 2)^T$ στραφεί κατά $\pi/6$, ποιές είναι οι νέες συντεταγμένες του; Για $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, έστω $\mathbf{y} = R(\theta)\,\mathbf{x}$. Δείξετε ότι $|\mathbf{y}| = |\mathbf{x}|$.

6. Έστω A ένας 4×4 πίνακας με στοιχεία a_{ij} (γράψτε τον!). Έστω U ένας από τους παρακάτω πίνακες. Βρείτε σε κάθε περίπτωση τους UA και AU.

$$(a) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (c) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Όμοια βρείτε σε κάθε περίπτωση τους EA και AE για E έναν από τους

$$(a) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (c) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

7. Αν A είναι ένας 3×3 πίνακας και $\lambda \in \mathbb{R}$, δείξτε ότι $\det(\lambda A) = \lambda^3 \det A$.

8. Λύστε με τον κανόνα του *Cramer* το σύστημα

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{με} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ποιός είναι ο αντίστροφος του A; Βρείτε τον αντίστροφο του

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

9. Αν

$$A = \begin{bmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

δείξτε ότι ο $P^{-}AP$ είναι διαγώνιος και ότι ο A ικανοποιεί την εξίσωση

$$A^3 - 2A^2 - A + 2I = O$$

10. Αν $i = \sqrt{-1}$, δείξτε ότι οι πίνακες του *Pauli*

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \ \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \ \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \ I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = I$$

$$\sigma_j \sigma_k = i\sigma_l, \qquad j, k, l \ \text{κυκλικά}.$$

Δείξτε ακόμα ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$e^{ix\sigma_1} \equiv I + ix\sigma_1 + \frac{(ix\sigma_1)^2}{2!} + \frac{(ix\sigma_1)^3}{3!} + ... = I\cos x + i\sigma_1 \sin x.$$

11. Αν

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

δείξτε ότι

$$A^2 = AA = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}.$$

12. Βρείτε τους αντίστροφους (αν υπάρχουν) των πινάκων

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

13. (α) Δείξτε ότι τα διανύσματα $\mathbf{i}' = (6/7, -3/7, 2/7)$, $\mathbf{j}' = (2/7, 6/7, 3/7)$, $\mathbf{k}' = (-3/7, -2/7, 6/7)$, αποτελούν ορθοκανονική βάση, δηλαδή είναι ανά δύο κάθετα και έχουν norm μονάδα. Επί πλέον η βάση αυτή είναι δεξιόστροφη. (β) Βρείτε τον πίνακα μετασχηματισμού από τη συνήθη βάση $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ στη βάση $\{\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'\}$.

14. Δείξετε ότι η ορίζουσα του γινομένου δυο 2×2 πινάκων ισούται με το γινόμενο των οριζουσών. Όπως θα δούμε στη Γραμμική Άλγεβρα, για δυο οποιουσδήποτε τετραγωνικούς πίνακες A και B ισχύει ότι, $\det(AB) = (\det A)(\det B)$.

4.8 Μιγαδικοί αριθμοί

Όπως η ανάγκη επίλυσης εξισώσεων του τύπου $x + 1 = 0$ οδήγησε στην κατασκευή των αρνητικών αριθμών, έτσι και η ανάγκη επίλυσης εξισώσεων του τύπου $x^2 + 1 = 0$, οδήγησε στην κατασκευή των φανταστικών αριθμών. Ο φανταστικός αριθμός i ορίζεται ως $i^2 = -1$, ή $i = \sqrt{-1}$. Ένας μιγαδικός αριθμός z ορίζεται ως

$$z = a + ib, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

όπου $a = \operatorname{Re} z$, $b = \operatorname{Im} z$ (*πραγματικό* και *φανταστικό* μέρος του z). Δυο μιγαδικοί αριθμοί είναι ίσοι αν έχουν ίσα τα πραγματικά και φανταστικά μέρη τους αντίστοιχα. Ο *συζυγής* του μιγαδικού αριθμού z είναι ο αριθμός

$$\overline{z} = a - ib.$$

Στο εξής θα θεωρούμε ότι ένα τριώνυμο με πραγματικούς συντελεστές, έχει πάντοτε δυο ρίζες, πραγματικές ή μιγαδικές. Αν οι ρίζες είναι μιγαδικές, τότε θα είναι συζυγείς (δείξτε το). Γενικώς *ένα πολυώνυμο n-οστού βαθμού με πραγματικούς συντελεστές έχει ακριβώς n ρίζες* (θεμελιώδες θεώρημα της Άλγεβρας). Όσες είναι μιγαδικές, εμφανίζονται κατά ζεύγη: αν $a + ib$ είναι μια ρίζα τότε και η $a - ib$ είναι επίσης ρίζα.

Πρόσθεση δυο μιγαδικών γίνεται αθροίζοντας τα πραγματικά και φανταστικά μέρη,

$$(a + ib) + (c + id) = (a + b) + i(c + d).$$

Πολλαπλασιασμός γίνεται λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι $i^2 = -1$,

$$(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc).$$

Ειδικά ο πολλαπλασιασμός ενός μιγαδικού με τον συζυγή του δίνει πάντα αριθμό πραγματικό μη αρνητικό,

$$z\overline{z} = a^2 + b^2$$

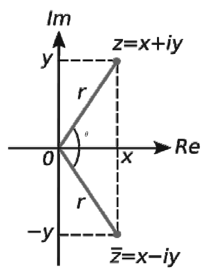
Μέτρο ενός μιγαδικού αριθμού z ονομάζεται ο μη αρνητικός αριθμός

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Για τη διαίρεση πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή με τον συζυγή του παρονομαστή,

$$\frac{a + ib}{c + id} = \frac{(a + ib)\,(c - id)}{(c + id)\,(c - id)} = \ldots = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}.$$

Αφού σε κάθε μιγαδικό $z = x + iy$ αντιστοιχεί ένα ζεύγος πραγματικών αριθμών (x, y),



μπορούμε να παραστήσουμε γραφικά τον z στο επίπεδο, χρησιμοποιώντας ένα σύστημα συντεταγμένων.

Στο σχήμα φαίνεται ότι για τον μη μηδενικό αριθμό z,

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Έτσι γίνεται προφανές το γεωμετρικό νόημα του μέτρου ενός μιγαδικού αριθμού (ταυτίζεται με το r στο σχήμα). Η γωνία θ λέγεται *όρισμα* του μιγαδικού αριθμού z.

- Παραστήστε στο μιγαδικό επίπεδο ένα μιγαδικό z και τον συζυγή του. Τι παριστάνει γεωμετρικά το άθροισμα $z_1 + z_2$ δυο μιγαδικών; Παραστήστε στο επίπεδο τους αριθμούς $1 + i,\ -1 + i\sqrt{3}$ καθώς και το γινόμενο τους. Ποια είναι τα ορίσματα τους;

Ας θεωρήσουμε τώρα ένα μιγαδικό z με μέτρο ένα, δηλαδή ο z κείται πάνω στο μοναδιαίο κύκλο,

$$z = f(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta.$$

Παραγωγίζοντας την f ως προς θ βρίσκουμε,

$$f'(\theta) = -\sin\theta + i\cos\theta = i(\cos\theta + i\sin\theta)$$

δηλαδή $f'(\theta) = if(\theta)$. Αλλά η εκθετική, είναι η μόνη συνάρτηση που η παράγωγος της είναι ανάλογη της ίδιας της συνάρτησης, άρα

$$f(\theta) = Ce^{i\theta}.$$

Για να προσδιορίσουμε τη σταθερή C, θέτουμε $\theta = 0$, δηλαδή $f(0) = Ce^{i0} = C$, και επειδή $f(0) = 1$, θα έχουμε $C = 1$, άρα $f(\theta) = e^{i\theta}$. Καταλήξαμε λοιπόν στον τύπο του Euler:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

Ο τύπος του Euler συνδέει εντυπωσιακά τους πιο διάσημους υπερβατικούς αριθμούς, το π και το e :

$$e^{i\pi} = -1.$$

Ο τύπος του Euler μας δίνει τη δυνατότητα να εκφράσουμε ένα μη μηδενικό μιγαδικό $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ με τη μορφή

$$z = re^{i\theta}, \quad r > 0,\ \theta \in \mathbb{R}.$$

Η εκθετική μορφή έχει το πλεονέκτημα ότι το γινόμενο δυο μιγαδικών z_1, z_2 εκφράζεται με ένα μιγαδικό, μέτρου ίσο με το γινόμενο των μέτρων των z_1, z_2 και ορίσματος ίσο με το άθροισμα των ορισμάτων:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}.$$

Όμοια το πηλίκο δυο μιγαδικών έχει ως μέτρο το πηλίκο των μέτρων τους και όρισμα την διαφορά των ορισμάτων τους. Η εκθετική μορφή δίνει αμέσως τον τύπο του de Moivre

$$z^n = r^n e^{in\theta} = r^n \left(\cos n\theta + i \sin n\theta\right).$$

Έτσι μπορούμε εύκολα να βρούμε τις ρίζες ενός μιγαδικού αριθμού. Για παράδειγμα, η εξίσωση

$$z^3 = 1$$

γράφεται

$$r^3 e^{i3\theta} = 1 = 1e^{i0}$$

άρα πρέπει $r^3 = 1$ και $3\theta = 2k\pi$. Συνεπώς $r = 1$ και $\theta = 2k\pi/3$. Έπεται ότι οι μιγαδικοί

$$z = \exp(i2k\pi/3) = \cos(2k\pi/3) + i\sin(2k\pi/3), \qquad k = 0, 1, 2$$

είναι οι κυβικές ρίζες της μονάδας (γράψτε τους σε καρτεσιανή μορφή). Κείνται στις κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου (μια κορυφή του είναι το σημείο $(1, 0)$) εγγεγραμμένου στο μοναδιαίο κύκλο (κάνετε σχήμα). Στην κλασική άλγεβρα, η εξίσωση $x^3 = 1$ λύνεται ως εξής:

$$x^3 - 1 = 0 \;\text{ ή }\; (x-1)(x^2+x+1) = 0,$$

άρα οι ρίζες είναι οι αριθμοί $1, (-1 \pm \; i\sqrt{3})/2$.

Ιδού τώρα μια διαφορετική προσέγγιση στον τύπο του Euler. Αν ορίσουμε ως e^{ix} το άθροισμα της σειράς Taylor

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \frac{(ix)^6}{6!} + \frac{(ix)^7}{7!} + ...,$$

παρατηρούμε ότι η σειρά μπορεί να γραφεί

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - i\frac{x^7}{7!} + ...,$$

ή ακόμα

$$e^{ix} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ...\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...\right).$$

Καταλήγουμε λοιπόν στον τύπο του Euler,

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

Κεφάλαιο 5

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Η έννοια της διαφορικής εξίσωσης εμφανίστηκε για πρώτη φορά στο νόμο του Νεύτωνα. Από τότε, διαφορικές εξισώσεις ανακύπτουν σε όλες τις φυσικές επιστήμες αλλά και σε κοινωνικές επιστήμες όπως η οικονομική επιστήμη και η κοινωνιολογία. Παραδείγματα θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο όπου κυρίως θα ασχοληθούμε με διαφορικές εξισώσεις χωριζομένων μεταβλητών και την εξίσωση του αρμονικού ταλαντωτή.

Η παραδοσιακή παρουσίαση ενός πρώτου μαθήματος διαφορικών εξισώσεων συνίσταται στην παράθεση μεθόδων για την επίλυση ορισμένων ΔΕ. Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στις γραμμικές ΔΕ, διότι είναι ακριβώς αυτές για τις οποίες κατά τους τελευταίους αιώνες έχουν αναπτυχθεί μέθοδοι για την επίλυση τους. Εν τούτοις, τα φυσικά φαινόμενα περιγράφονται συνήθως από μη γραμμικές ΔΕ. Επί πλέον, καίτοι δεν υπάρχουν συστηματικές μέθοδοι επίλυσης των μη γραμμικών ΔΕ, οι λύσεις τους εμφανίζουν την πιο ενδιαφέρουσα συμπεριφορά. Για τους λόγους αυτούς, θα περιορίσουμε στο ελάχιστο δυνατό την παράθεση μεθόδων επίλυσης ΔΕ. Αντιθέτως θα παρουσιάσουμε τη γεωμετρική, ποιοτική άποψη της θεωρίας των ΔΕ. Ιδιαίτερη έμφαση θα δοθεί στη μελέτη του πορτραίτου των φάσεων ενός δυναμικού συστήματος που περιγράφεται από ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων. Μοντέλα οικολογίας θα μας δώσουν το κίνητρο για την ανάπτυξη της θεωρίας των μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων σε δυο διαστάσεις. Τέλος, το MATHEMATICA θα αποδειχθεί ισχυρό εργαλείο τόσο για την επίλυση των ΔΕ, όσο και για την ποιοτική μελέτη τους.

5.1 Εισαγωγή στις Διαφορικές Εξισώσεις

Μια εξίσωση που περιέχει μια άγνωστη συνάρτηση και τις παραγώγους της μέχρι κάποιας τάξης λέγεται διαφορική εξίσωση. Π.χ.

$$\frac{dx}{dt} = x(t)(1 - x(t)), \quad \ddot{x}(t) + \dot{x}^2(t) + x^3(t) + 1 = 0$$

είναι διαφορικές εξισώσεις πρώτης και δεύτερης τάξης αντίστοιχα. Διαφορικές εξισώσεις ανακύπτουν σε όλες τις φυσικές επιστήμες αλλά και στις επιστήμες εκείνες που ένα πρόβλημα μπορεί να διατυπωθεί με μαθηματικούς όρους. Για παράδειγμα ο νόμος του Νεύτωνα εκφράζεται με μια διαφορική εξίσωση (ίσως η πρώτη που αντιμετώπισε ο άνθρωπος), αφού σε μια διάσταση μπορεί να γραφεί με τη μορφή

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F(t, x).$$

Κάθε φορά που σ' ένα πρόβλημα εμφανίζεται ο ρυθμός μεταβολής ενός μεγέθους, οδηγούμαστε σε μια διαφορική εξίσωση. Ας δούμε μερικά παραδείγματα.

Εκθετική μείωση μεγέθους. Ας υποθέσουμε ότι ένας μεγάλος πληθυσμός βακτηριδίων αφήνεται χωρίς τροφή. Για ευκολία θα υποθέσουμε ότι τα βακτηρίδια είναι στείρα. Αν συμβολίσουμε με $N(t)$ το πλήθος των βακτηριδίων τη χρονική στιγμή t, είναι εύλογο να υποθέσουμε ότι ο αριθμός των θανάτων ΔN μέσα σε χρονικό διάστημα Δt είναι ανάλογος του πληθυσμού εκείνη τη στιγμή και ανάλογος του διαστήματος Δt, δηλαδή

$$\Delta N = -\lambda N \Delta t.$$

Ο συντελεστής αναλογίας λ, εκφράζει τη θνησιμότητα του πληθυσμού και εξαρτάται από παράγοντες που είτε δεν γνωρίζουμε, είτε δεν επιθυμούμε να εισάγουμε στο πρόβλημα. Το πρόσημο μείον οφείλεται στο ότι η μεταβολή ΔN είναι αρνητική. Διαιρώντας με Δt και παίρνοντας το όριο όταν $\Delta t \to 0$ θα έχουμε τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N.$$

Μια λύση είναι η $e^{-\lambda t}$, ή πιο γενικά, $N(t) = Ce^{-\lambda t}$, όπου C μια αυθαίρετη σταθερά. Με τον όρο λύση, εννοούμε μια συνάρτηση που ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση. Η σταθερά C προσδιορίζεται ως εξής. Αν ξεκινήσαμε με N_0 βακτηρίδια (δηλ. τη χρονική στιγμή $t = 0$ ο αριθμός των βακτηριδίων ήταν N_0), τότε

$$N_0 = N(0) = Ce^{-\lambda 0} \Rightarrow C = N_0$$

Έχουμε λοιπόν κάποιο νόμο εκθετικής μείωσης του πληθυσμού. Είναι ενδιαφέρον ότι αν κάνουμε τις αντικαταστάσεις, "αριθμός βακτηριδίων"->"αριθμός ραδιενεργών πυρήνων", "αριθμός θανάτων ΔN"->"αριθμός διασπάσεων ΔN" κλπ, τότε καταλήγουμε στο γνωστό νόμο των ραδιενεργών διασπάσεων. Είναι προφανές ότι μπορούμε να μεταφέρουμε στον κόσμο των βακτηριδίων γνωστές έννοιες, όπως, χρόνος υποδιπλασιασμού, σταθερά χρόνου κλπ.

Εκθετική αύξηση. Ένας αρχικός πληθυσμός βακτηριδίων τίθεται μέσα σε περιβάλλον με απεριόριστη τροφή τη χρονική στιγμή $t = 0$. Υποθέτοντας ότι η αύξηση του πληθυσμού ΔN μέσα σε χρονικό διάστημα Δt είναι ανάλογη του πληθυσμού εκείνη τη στιγμή και ανάλογος του διαστήματος Δt, βρείτε τον πληθυσμό ως συνάρτηση του χρόνου.

Κίνηση υπό σταθερή δύναμη. Αφήνουμε ελεύθερο ένα σώμα να κινηθεί υπό την επίδραση του βάρους του (αγνοούμε την αντίσταση του αέρα). Ο νόμος του Νεύτωνα παίρνει τη μορφή

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = -mg \;\Rightarrow\; \frac{d^2z}{dt^2} = -g.$$

Ολοκληρώνοντας έχουμε $\frac{dz}{dt} = -gt + C_1$ και ολοκληρώνοντας ξανά

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1t + C_2,$$

όπου C_1 και C_2 είναι αυθαίρετες σταθερές. Για να προσδιορίσουμε τις σταθερές, δεν αρκεί μία αρχική συνθήκη (όπως ήταν στο πρώτο παράδειγμα ο αρχικός πληθυσμός των βακτηριδίων). Απαιτούνται δυο τέτοιες αρχικές συνθήκες, όπως η αρχική θέση και η αρχική ταχύτητα του σώματος. Αν π.χ. γνωρίζουμε ότι το σώμα εκτινάσσεται προς τα κάτω με αρχική ταχύτητα 20μ/ς, από ύψος 40μ, τότε η λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 - 20t + 40.$$

5.2 Ύπαρξη λύσεων και μοναδικότητα

Ο αναγνώστης με ιδιαίτερη μαθηματική ευαισθησία θα έχει ίσως αναρωτηθεί αν οι λύσεις που βρήκαμε στα παραδείγματα αυτά είναι οι μόνες δυνατές. Στην περίπτωση της κατακόρυφης βολής, η γνώση της αρχικής θέσης και ταχύτητας του σώματος, επέτρεψε τον προσδιορισμό της θέσης του κάποια μεταγενέστερη στιγμή. Ακόμα και αν διαισθητικά φαίνεται πως η λύση είναι μοναδική, δεν ξέρουμε στη γενική περίπτωση την απάντηση στο ερώτημα: Αν δοθεί μια ΔΕ, υπάρχει λύση της; Και αν υπάρχει, είναι μοναδική; Το ερώτημα δεν έχει μόνο μαθηματικό ενδιαφέρον, αλλά και μεγάλη πρακτική σημασία. Είναι ουσιώδες να γνωρίζουμε π.χ. αν, δοθείσης της θέσης και της ταχύτητας ενός δορυφόρου κάποια στιγμή, μπορούμε να προβλέψουμε μονοσήμαντα τη θέση του κάποια μεταγενέστερη χρονική στιγμή.

Για να απαντήσουμε στο ερώτημα αυτό ας επανέλθουμε στην απλή ΔΕ $dx/dt = ax\,(t)$ ή $\dot{x} = ax$. Αν C είναι οποιαδήποτε σταθερά, η συνάρτηση $x\,(t) = Ce^{at}$ είναι μια λύση της ΔΕ όπως φαίνεται με αντικατάσταση στην ΔΕ. Επί πλέον είναι η μοναδική λύση. Πράγματι, έστω ότι η συνάρτηση $u(t)$ είναι μια λύση της ΔΕ. Υπολογίζουμε την παράγωγο της $u(t)e^{-at}$:

$$\frac{d}{dt}\left[u(t)e^{-at}\right] = \dot{u}e^{-at} - aue^{-at} = aue^{-at} - aue^{-at} = 0.$$

Άρα είναι $u(t)e^{-at}$ μια σταθερά C, δηλαδή $u\,(t) = Ce^{at}$, ο.ε.δ.

Παρατηρούμε ότι για κάθε τιμή της σταθεράς C έχουμε μια λύση. Οι λύσεις αυτές συνίστανται από μια οικογένεια εκθετικών. Κάθε καμπύλη της οικογένειας είναι μια λύση της ΔΕ. Στο σχήμα φαίνονται μερικές από τις καμπύλες αυτές για $a = 1$.

Αν δοθεί μια αρχική συνθήκη, δηλαδή η τιμή x_0 της λύσης σε κάποια στιγμή t_0, τότε η σταθερά C προσδιορίζεται μονοσήμαντα: $x(t_0) = x_0$, υποχρεώνει τη σταθερά C να ικανοποιεί την $Ce^{at_0} = x_0$. Άρα *η ΔΕ έχει μοναδική λύση που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη* $x(t_0) = x_0$. Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι στο διάγραμμα $x - t$, μία μόνο καμπύλη περνά από το σημείο (t_0, x_0). Συνήθως για απλότητα παίρνουμε $t_0 = 0$, οπότε $C = x_0$. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι έχουμε ένα *πρόβλημα αρχικών τιμών*

$$\dot{x} = ax, \quad x(0) = x_0.$$

Το αποτέλεσμα αυτό που αποδείξαμε για την απλή διαφορική εξίσωση $\dot{x} = ax$, ισχύει γενικότερα. Ακριβέστερα, ισχύει το *θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας της λύσης μιας διαφορικής εξίσωσης*, που θα δούμε αναλυτικότερα σε άλλο μάθημα. Σύμφωνα μ΄ αυτό, υπάρχει μοναδική λύση $x(t)$ της ΔΕ

$$\dot{x} = f\,(t, x)$$

που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $x(0) = x_0$, αρκεί η συνάρτηση f να ικανοποιεί ήπιες συνθήκες, π.χ. να έχει συνεχή παράγωγο ως προς x. Επί πλέον, το θεώρημα καθορίζει και το διάστημα $(-a, a)$ στο οποίο ορίζεται η λύση.

Παρ΄ όλο που το θεώρημα μοιάζει να έχει εφαρμογή μόνο σε ΔΕ πρώτης τάξης, εύκολα μπορεί να εφαρμοστεί σε διαφορικές εξισώσεις ανώτερης τάξης. Ας δούμε πάλι το παράδειγμα του θεμελιώδους νόμου της μηχανικής που είναι μια διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης. Ας υποθέσουμε ότι ένα σωμάτιο μάζας $m = 1$ (σε αυθαίρετες μονάδες) κινείται υπό την επίδραση μιας δύναμης που εξαρτάται από το χρόνο. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ βρίσκεται στη θέση $x(0) = x_0$ και η ταχύτητα του είναι $v(0) = v_0$. Θέτοντας $v = dx/dt$, ο νόμος του Νεύτωνα μπορεί να γραφεί ως

$$\frac{dv}{dt} = F\,(t)\,,$$

κατά συνέπεια υπάρχει μοναδική λύση $v(t)$ με $v(0) = v_0$. Γνωρίζοντας λοιπόν τη συνάρτηση $v(t)$, το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\frac{dx}{dt} = v\left(t\right), \quad x(0) = x_0$$

έχει μοναδική λύση. Έτσι, αν είναι γνωστή η αρχική κατάσταση του σωματιδίου (δηλαδή η θέση και η ταχύτητα του κάποια χρονική στιγμή $t = 0$), τότε μπορεί μονοσήμαντα να προβλεφθεί η κατάσταση του κάποια μεταγενέστερη χρονική στιγμή $t > 0$. Το συμπέρασμα αυτό, που εκφράζει την αρχή της αιτιοκρατίας στην κλασσική μηχανική, είναι συνέπεια του θεωρήματος ύπαρξης και μοναδικότητας της λύσης μιας διαφορικής εξίσωσης που προαναφέραμε.

5.3 Διαφορικές εξισώσεις που λύνονται με ολοκλήρωση

Η πιο απλή μορφή μιας ΔΕ είναι αυτή των χωριζομένων μεταβλητών:

$$\frac{dx}{dt} = h\left(x\right) g\left(t\right).$$

Στην περίπτωση αυτή γράφουμε $\frac{dx}{h(x)} = g\left(t\right) dt$ και η λύση επιτυγχάνεται με απλή ολοκλήρωση,

$$\int \frac{dx}{h\left(x\right)} = \int g\left(t\right) dt + C$$

Ας δούμε μερικά παραδείγματα.

Ψύξη σώματος (Newton). *Ο ρυθμός ψύξης ενός σώματος είναι ανάλογος της διαφοράς θερμοκρασίας του σώματος και του περιβάλλοντος.* Ένα φλιτζάνι τσάι, αρχικής θερμοκρασίας 80^0C αφήνεται σε ένα δωμάτιο θερμοκρασίας 20^0C. Να βρεθεί η θερμοκρασία του τσαγιού σε συνάρτηση με το χρόνο.

Αν $\theta\left(t\right)$ είναι η θερμοκρασία τη στιγμή t ο νόμος του (Newton) που αναφέρεται στο ρυθμό ελάττωσης της θερμοκρασίας γράφεται

$$\frac{d\theta}{dt} = -k\left(\theta - 20\right)$$

όπου $k > 0$ συντελεστής αναλογίας. Το πρόσημο μείον τίθεται διότι ο ρυθμός $d\theta/dt$ είναι αρνητικός. Η ΔΕ είναι χωριζομένων μεταβλητών άρα

$$\int \frac{d\theta}{\theta - 20} = -\int k dt \;\Rightarrow\; \ln\left|\theta - 20\right| = -kt + C \;\Rightarrow\; \left|\theta - 20\right| = e^{-kt+C} = e^C e^{-kt},$$

ή $|\theta - 20| = Ae^{-kt}$ όπου θέσαμε $A = e^C$. Επειδή $\theta - 20 > 0$, θα έχουμε $\theta - 20 = Ae^{-kt}$, ή $\theta = Ae^{-kt} + 20$. Δεδομένου ότι $\theta(0) = 80$, η σταθερά A προκύπτει ίση με 60, άρα τελικά

$$\theta\left(t\right) = 60e^{-kt} + 20$$

Δημιουργία πάγου στην επιφάνεια μιας λίμνης. Όπως είναι γνωστό, ο πάγος αρχίζει να σχηματίζεται στην επιφάνεια του νερού. Το στρώμα του πάγου $y(t)$ είναι μια αύξουσα συνάρτηση του χρόνου. Καθώς το στρώμα αυτό γίνεται παχύτερο, η θερμότητα που διαφεύγει στο περιβάλλον έχει να διανύσει μεγαλύτερη απόσταση, κατά συνέπεια ο ρυθμός σχηματισμού του πάγου dy/dt ελαττώνεται. Περιμένουμε δηλαδή $dy/dt =$ φθίνουσα συνάρτηση του y. Το απλούστερο μοντέλο που μπορούμε να δοκιμάσουμε είναι να θεωρήσουμε ότι ο ρυθμός dy/dt είναι αντιστρόφως ανάλογος του y:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{k}{y}, \quad k > 0.$$

Με χωρισμό μεταβλητών έχουμε

$$\int y dy = \int k dt \Rightarrow y^2/2 = kt + C.$$

Αν θεωρήσουμε ότι $y = 0$ όταν $t = 0$, προκύπτει ότι $C = 0$, άρα

$$y\left(t\right) = \sqrt{2kt}.$$

Αντίσταση του αέρα. Η αντίσταση του αέρα σ΄ ένα σώμα που κινείται στην ατμόσφαιρα συνήθως δεν λαμβάνεται υπ΄ όψιν στα στοιχειώδη προβλήματα βολών. Εν τούτοις η δύναμη αυτή είναι σημαντική, ιδίως αν η ταχύτητα του σώματος είναι μεγάλη. Για σχετικά μεγάλες ταχύτητες ($\sim 150m/sec$) το πείραμα δείχνει ότι η αντίσταση του αέρα είναι ανάλογη της μετωπικής επιφάνειας S του σώματος, ανάλογη της πυκνότητας ρ του αέρα και ανάλογη του τετραγώνου της ταχύτητας:

$$F = \frac{1}{2} C \rho S v^2.$$

C είναι ο αεροδυναμικός συντελεστής και εξαρτάται από το σχήμα του σώματος (π.χ. το ιχθυοειδές έχει μικρότερο συντελεστή C από μια επίπεδη πλάκα). Για μικρές ταχύτητες, χρησιμοποιείται ένα απλούστερο μοντέλο, σύμφωνα με το οποίο, "η αντίσταση του αέρα είναι ανάλογη της ταχύτητας", $F = kv$. Σε ένα σώμα που πέφτει κατακόρυφα στον αέρα, ασκούνται λοιπόν δυο αντίρροπες δυνάμεις, το βάρος και η αντίσταση του αέρα. Ο θεμελιώδης νόμος της Μηχανικής γράφεται

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv$$

Διαιρώντας με m και θέτοντας $k/m = a$, προκύπτει $\dot{v} = -a\left(v - mg/k\right)$. Με χωρισμό των μεταβλητών έχουμε

$$\int \frac{dv}{(v - mg/k)} = -a \int dt \;\Rightarrow\; \ln\left|v - mg/k\right| = -at + C$$

ή $|v - mg/k| = e^{-at+C} = Ae^{-at}$, όπου $A = e^C > 0$. Άρα προκύπτει $v - mg/k = Ae^{-at}$. Επειδή $v = 0$ όταν $t = 0$, θα έχουμε $0 - mg/k = Ae^{-a0}$, δηλ $A = -mg/k$, άρα τελικά

$$v(t) = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-at}\right).$$

Η ταχύτητα αυξάνει μέχρις ότου το σώμα αποκτήσει οριακή ταχύτητα $v_\infty = mg/k$.

- Λύστε το ίδιο πρόβλημα υποθέτοντας αυτή τη φορά ότι "αντίσταση αέρα ανάλογη του τετραγώνου της ταχύτητας" . Αποφασίστε ποιο μοντέλο συμφωνεί καλύτερα με τα παρακάτω πειραματικά δεδομένα ($g = 9.8m/s^2$).

t (sec)	0	5	10	15	20	25	30	35	40
v (m/s)		31.6	43.2	47.5	49.1	49.7	49.9	50.0	50.0

- Ας υποθέσουμε ότι ένα πυροβόλο εκτοξεύει σκάγια (από μόλυβδο) διαμέτρου $2.5mm$ με αρχική ταχύτητα $v_0 = 380m/sec$. Η μεγάλη σχετικώς ταχύτητα μας υποχρεώνει να προτιμήσουμε το μοντέλο "$F = kv^2$." Αγνοώντας το βάρος και εφαρμόζοντας το θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής έχουμε

$$m\dot{v} = -kv^2.$$

Βρείτε την ταχύτητα $v(t)$ σε συνάρτηση με το χρόνο. Βρείτε την απόσταση $x(t)$ σε συνάρτηση με το χρόνο. Απαλείψτε το χρόνο για να βρείτε τη σχέση μεταξύ ταχύτητας-απόστασης, $v(x) = v_0 e^{-ax}$ όπου $a = k/m$. Προσδιορίστε τη σταθερά a δεδομένου ότι η ταχύτητα στα $35m$ έχει μειωθεί στο μισό της αρχικής. Αν χρησιμοποιηθούν σκάγια διπλάσιας διαμέτρου, σε ποια απόσταση θα έχουν ταχύτητα $190m/sec$; Το αποτέλεσμα συμφωνεί με την εμπειρική αντίληψη ότι τα βαριά σώματα πάνε μακρύτερα; Στο αποτέλεσμα $v(x) = v_0 e^{-ax}$ μπορούμε να καταλήξουμε πιο γρήγορα αν εφαρμόσουμε τον κανόνα της αλυσίδας

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$$

για να βρούμε την παράγωγο της ταχύτητας ως προς την απόσταση (dv/dx) αντί της χρονικής παραγώγου (dv/dt). Εξηγείστε.

Η διαστολή του σύμπαντος. Η παρατηρησιακή αστρονομία έχει αποδείξει ότι το σύμπαν διαστέλλεται. Είναι ενδιαφέρον ότι όταν ο Einstein κατέληξε στις εξισώσεις της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας το 1916, αντελήφθη αμέσως ότι σύμφωνα με τη θεωρία αυτή, το σύμπαν δεν μπορεί να είναι στατικό. Οι εξισώσεις προέβλεπαν ότι το σύμπαν διαστέλλεται ή συστέλλεται, αλλά την εποχή εκείνη η ιδέα φαινόταν παράλογη. Ένα από τα απλούστερα μοντέλα που χρησιμοποιούμε ακόμα και σήμερα, είναι η υπόθεση ότι το σύμπαν είναι μια πελώρια ομογενής και ισότροπη σφαίρα, ακτίνας $R(t)$, όπου t παριστάνει χρόνο. Οι εξισώσεις του Einstein στην περίπτωση αυτή ανάγονται στην ΔΕ

$$\ddot{R} = -\frac{GM}{R^2}$$

όπου G είναι η σταθερά της παγκόσμιας έλξης και M είναι η μάζα του σύμπαντος. Μπορούμε να μετατρέψουμε αυτή τη ΔΕ δεύτερης τάξης σε μια πρώτης τάξης με το εξής κόλπο. Πολ/ζουμε και τα δυο μέλη με $\dot{R}$ και επειδή

$$\frac{d}{dt}\dot{R}^2 = 2\ddot{R}\dot{R}, \quad \text{και} \quad \frac{d}{dt}\frac{1}{R} = -\frac{\dot{R}}{R^2},$$

παίρνουμε

$$\frac{d}{dt}\dot{R}^2 = 2GM\frac{d}{dt}\frac{1}{R}$$

οπότε ολοκληρώνοντας έχουμε τη ΔΕ

$$\dot{R}^2 = \frac{2GM}{R} + C \;\Rightarrow\; \dot{R} = \pm\sqrt{\frac{2GM}{R} + C}.$$

Επειδή το σύμπαν διαστέλλεται, $\dot{R} > 0$, άρα έχουμε τελικά

$$\dot{R} = \sqrt{\frac{2GM}{R} + C}.$$

Χωρίς να λύσουμε τη διαφορική αυτή εξίσωση μπορούμε να δούμε ποιοτικά την εξέλιξη του σύμπαντος. Ας θεωρήσουμε την περίπτωση που $C > 0$. Καθώς η ακτίνα R μεγαλώνει, το $\dot{R}$ εξακολουθεί να δίνεται από την παραπάνω εξίσωση, άρα το σύμπαν εξακολουθεί να διαστέλλεται. Ο ρυθμός διαστολής ελαττώνεται και τείνει ασυμπτωτικά στο $\sqrt{C}$ καθώς $R \to \infty$. Άρα για $C > 0$ το σύμπαν διαστέλλεται επ΄ άπειρον με ελαττούμενο ρυθμό.

- Στην περίπτωση που $C < 0$ θέσετε $K = -C$, με $K > 0$ και δείξετε ότι R αυξάνει μέχρι μια τιμή $R_{\max}$ και στη συνέχεια ελαττώνεται (θα χρειαστείτε και την αρχική εξίσωση για την απόδειξη). Καθώς R ελαττώνεται, παίρνει πολύ μεγάλες αρνητικές τιμές, δηλαδή ακολουθεί “a big crunch”.

- Στην περίπτωση που $C = 0$, λύστε τη ΔΕ , υποθέτοντας ότι $R = 0$ όταν $t = 0$. Βρείτε τη συνάρτηση $R(t)$. Τι προβλέπει το μοντέλο αυτό για τη διαστολή του σύμπαντος;

- **Κύκλωμα** $R - L$. Αν ένα κύκλωμα $R - L$ σε σειρά τροφοδοτηθεί με πηγή σταθερής ΗΕΔ, E, ο δεύτερος κανόνας του Kirchhoff δίνει

  $$E - L\frac{dI}{dt} - IR = 0.$$

  Βρείτε την ένταση I ως συνάρτηση του χρόνου t.

- **Η λογιστική ΔΕ**. Όταν λέμε ότι η αύξηση του παγκόσμιου πληθυσμού είναι 2% εννοούμε ότι ο *σχετικός ρυθμός αύξησης*, $\frac{dN/dt}{N} = 0.02$, όπου N ο πληθυσμός και dN/dt ο ρυθμός αύξησης του. Μετρήσεις σε χρονική περίοδο πάνω από ένα αιώνα, έχουν δείξει ότι ο σχετικός ρυθμός αύξησης φθίνει γραμμικά με τον πληθυσμό,
$$\frac{dN/dt}{N} = a - bN,$$
(Λογιστικό μοντέλο). Π.χ. στις ΗΠΑ μεταξύ 1790 και 1940, οι τιμές των παραμέτρων είναι $a = 0.0318$ και $b = 0.00017$. Για μικρές τιμές του πληθυσμού N, έχουμε προσεγγιστικά
$$\frac{dN/dt}{N} \simeq a$$
δηλαδή ο πληθυσμός αυξάνει εκθετικά. Η αύξηση του πληθυσμού μηδενίζεται όταν $a-bN = 0$, δηλαδή όταν $N = a/b$. Αυτή την ανωτάτη τιμή του πληθυσμού συμβολίζουμε με k, δηλ. $k = a/b$ είναι ο μέγιστος πληθυσμός που μπορεί να αναπτυχθεί σε κάποιο περιβάλλον. Έτσι, η λογιστική ΔΕ γράφεται ως
$$\frac{dN}{dt} = aN\left(1 - \frac{N}{k}\right).$$
Λύστε την λογιστική ΔΕ και κάνετε το γράφημα της λύσης.

5.4 Διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης

Στο παράδειγμα της ελεύθερης πτώσης είδαμε ότι στη λύση της ΔΕ υπεισέρχονται δυο αυθαίρετες σταθερές, που προέρχονται από τις δυο διαδοχικές ολοκληρώσεις που κάναμε για να βρούμε τη λύση. Δυο σταθερές είναι ένα γενικό χαρακτηριστικό των ΔΕ δεύτερης τάξης (όπως τρεις σταθερές προκύπτουν από τη λύση μιας ΔΕ τρίτης τάξης κ.ο.κ.). Εν τούτοις, η λύση μιας ΔΕ δεύτερης τάξης δεν επιτυγχάνεται πάντα με διαδοχικές ολοκληρώσεις. Τυπικό παράδειγμα είναι η εξίσωση του αρμονικού ταλαντωτή (π.χ. σώμα μάζας m συνδεδεμένο με ελατήριο σταθεράς k),
$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx.$$

Ελεύθερος αρμονικός ταλαντωτής. Αν θέσουμε $\omega^2 = k/m$ η εξίσωση του αρμονικού ταλαντωτή γράφεται
$$\ddot{x} = -\omega^2 x.$$
Οι μόνες συναρτήσεις που ικανοποιούν τη ΔΕ, $\ddot{x} = -\omega^2 x$, είναι οι συναρτήσεις ημίτονο και συνημίτονο. Η συνάρτηση $\sin \omega t$ είναι λύση της ΔΕ όπως μπορεί να πιστοποιηθεί με αντικατάσταση. Αλλά και η συνάρτηση $\cos \omega t$, είναι επίσης λύση. Αυτό που είναι αξιοσημείωτο είναι

ότι ο γραμμικός συνδυασμός $A\cos\omega t + B\sin\omega t$ είναι επίσης λύση (ελέγξτε το). Μπορεί να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση

$$x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

είναι η πιο γενική λύση της ΔΕ. Όπως προείπαμε, περιέχει δυο σταθερές, A και B. Αυτές προσδιορίζονται αν δοθούν δυο αρχικές συνθήκες, η αρχική θέση και η αρχική ταχύτητα. Αν π.χ. γνωρίζουμε ότι τη χρονική στιγμή $t = 0$, το σώμα περνά από τη θέση x_0, με ταχύτητα v_0, τότε έχουμε

$$\begin{aligned} 0 = x(0) &= A\cos 0 + B\sin 0 = A.1 + B.0 = A, \\ v_0 = \dot{x}(0) &= \left(-\omega A\sin\omega t + \omega B\cos\omega t\right)\big|_{t=0} = \omega B \end{aligned}$$

Λύση του συστήματος αυτού είναι $A = 0,\ B = v_0/\omega$. Έτσι το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\ddot{x} = -\omega^2 x, \quad x(0) = 0, \dot{x}(0) = v_0,$$

έχει λύση την $x(t) = (v_0/\omega)\sin\omega t$.

- Ποιά είναι η λύση αν το σώμα απομακρυνθεί από τη θέση ισορροπίας κατά a και ύστερα αφεθεί ελεύθερο;

- Με λίγη τριγωνομετρία, αν $B \neq 0$, η γενική λύση $x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$ μπορεί πάντα να γραφεί υπό τη μορφή

  $$x(t) = x_0\sin(\omega t + \varphi), \quad x_0 = \sqrt{A^2 + B^2},\ \varphi = \arctan\frac{A}{B}.$$

  Μια διαφορετική απόδειξη χρησιμοποιεί τα στρεφόμενα διανύσματα.

- Κύκλωμα $L - C$. Ένας πυκνωτής χωρητικότητας $9\mu F$ φορτίζεται με $Q = 6\mu C$ και συνδέεται με πηνίο αυτεπαγωγής $L = 36 Henry$. Ο κανόνας Kirchhoff για το κύκλωμα αυτό, $LdI/dt + Q/C = 0$, μετατρέπεται βάσει του ορισμού $I = dQ/dt$ σε μια ΔΕ δεύτερης τάξης. Βρείτε τη συνάρτηση $Q(t)$.

Φθίνουσες ταλαντώσεις. Αν θεωρήσουμε απόσβεση ανάλογη της ταχύτητας (θυμηθείτε ότι για μικρές ταχύτητες η υπόθεση "αντίσταση ανάλογη της ταχύτητας" είναι μια καλή προσέγγιση), η εξίσωση του αρμονικού ταλαντωτή γράφεται

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -b\frac{dx}{dt} - kx$$

όπου ο αριθμός $b > 0$ λέγεται σταθερά απόσβεσης. Διαιρώντας με m και θέτοντας $2\lambda = b/m,\ \omega_0^2 = k/m$, θα έχουμε

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \tag{5.4.1}$$

Όπως και στην περίπτωση του ελεύθερου αρμονικού ταλαντωτή, αν $f(t)$ και $g(t)$ είναι λύσεις της (5.4.1), τότε και $Af(t)+Bg(t)$ είναι λύση (ελέγξτε το). Δοκιμάζουμε λύσεις της μορφής $x(t)=e^{\rho t}$, όπου ρ προσδιοριστέος αριθμός. (Δώστε ένα επιχείρημα που να δικαιολογεί αυτή τη δοκιμή). Αντικαθιστώντας την στην (5.4.1), βρίσκουμε

$$\rho^2 e^{\rho t}+2\lambda\rho e^{\rho t}+\omega_0^2 e^{\rho t}=0$$

και επειδή το εκθετικό είναι διάφορο του μηδενός, το ρ είναι λύση (πραγματική ή μιγαδική) της *χαρακτηριστικής εξίσωσης*

$$\rho^2+2\lambda\rho+\omega_0^2=0.$$

Έχουμε λοιπόν

$$\rho_{1,2}=-\lambda\pm\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}.$$

Αναλόγως του είδους των ριζών της χαρακτηριστικής εξίσωσης (ΧΕ) έχουμε τις εξής περιπτώσεις.

α) $\lambda>\omega_0$. Οι ρίζες είναι πραγματικές και άνισες. Οι συναρτήσεις $e^{\rho_1 t}$ και $e^{\rho_2 t}$ είναι λύσεις της ΔΕ και η πιο γενική λύση είναι

$$x(t)=C_1 e^{\rho_1 t}+C_2 e^{\rho_2 t}$$

Επειδή και οι δυο ρίζες $\rho_{1,2}$ είναι αρνητικές, η λύση φθίνει γρήγορα στο 0, δηλαδή δεν έχουμε ταλάντωση (απεριοδική κίνηση).

β) $\lambda=\omega_0$. Στην περίπτωση αυτή η (ΧΕ) έχει μόνο μια διπλή ρίζα, $\rho_{1,2}=-\lambda$. Μπορούμε να διαπιστώσουμε με αντικατάσταση στη (5.4.1) ότι εκτός της $e^{-\lambda t}$, και η $te^{-\lambda t}$ είναι λύση. Κατά συνέπεια η γενική λύση είναι

$$x(t)=(C_1+C_2 t)\,e^{-\lambda t}$$

γ) $\lambda<\omega_0$. Στην περίπτωση αυτή οι ρίζες $\rho_{1,2}$ είναι μιγαδικές συζυγείς. Θέτοντας

$$\omega^2=\omega_0^2-\lambda^2>0,$$

(άρα $\rho_{1,2}=-\lambda\pm i\omega$) η γενική λύση της (5.4.1) είναι

$$x(t)=C_1 e^{\rho_1 t}+C_2 e^{\rho_2 t}=e^{-\lambda t}\left(C_1 e^{i\omega t}+C_2 e^{-i\omega t}\right),$$

όπου C_1 και C_2 αυθαίρετες (μιγαδικές εν γένει) σταθερές. Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Euler, η λύση γράφεται

$$x(t)=e^{-\lambda t}\left(A\cos\omega t+B\sin\omega t\right)$$

με $A = C_1 + C_2$ και $B = i(C_1 - C_2)$. Επειδή η λύση είναι πραγματική, πρέπει και οι σταθερές A και B να είναι πραγματικοί αριθμοί. Και αυτό πράγματι συμβαίνει διότι οι μιγαδικές σταθερές C_1 και C_2 είναι συζυγείς (ελέγξτε το). Αν θέλουμε, μπορούμε όπως και στην περίπτωση του ελεύθερου αρμονικού ταλαντωτή να μετατρέψουμε τον γραμμικό συνδυασμό σε μια μόνο αρμονική συνάρτηση (αρκεί $B \neq 0$). Έτσι η λύση της (5.4.1) μπορεί να γραφεί

$$x\left(t\right) = x_0 e^{-\lambda t} \sin\left(\omega t + \varphi\right), \quad x_0 = \sqrt{A^2 + B^2},\ \varphi = \arctan\frac{A}{B}$$

Οι σταθερές A και B, ή x_0 και φ, προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες. Η λύση παριστάνει αρμονική ταλάντωση με ελαττούμενο (εκθετικά) πλάτος. Η συχνότητα της ταλάντωσης $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$ είναι διαφορετική της ιδιοσυχνότητας ω_0 του ελεύθερου ταλαντωτή, αλλά στην περίπτωση μικρής απόσβεσης ($\lambda \ll \omega_0$), μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η συχνότητα της ταλάντωσης ταυτίζεται με την ιδιοσυχνότητα του ταλαντωτή, $\omega \simeq \omega_0$.

Κύκλωμα $R - L - C$ **σε σειρά**. Αν φορτίσουμε τον πυκνωτή με φορτίο Q_0 και τον συνδέσουμε με αντίσταση και πηνίο σε σειρά, ο κανόνας του Kirchhoff γράφεται

$$IR + L\frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} = 0$$

και λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι $Q = dI/dt$, θα έχουμε

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{LC} = 0.$$

Γράφουμε τη λύση υπό τη 2η μορφή

$$Q\left(t\right) = Ae^{-\frac{R}{2L}t} \sin\left(\omega t + \varphi\right)$$

όπου

$$\omega^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}.$$

Παρατηρούμε ότι η συχνότητα ταλάντωσης του φορτίου (άρα και του ρεύματος) είναι διαφορετική από την ιδιοσυχνότητα $\omega_0 = 1/LC$ του κυκλώματος $L - C$. Οι αρχικές συνθήκες $Q\left(0\right) = Q_0$ και $I\left(0\right) = \dot{Q}\left(0\right) = 0$ (γιατί;) επιβάλλουν

$$A \sin\varphi = Q_0, \quad 0 = -\frac{R}{2L}A\sin\varphi + A\omega\cos\varphi,$$

και προκύπτει αμέσως

$$A = \frac{\omega_0}{\omega}Q_0, \quad \varphi = \arctan\frac{\omega}{R/2L}.$$

- Αν χρησιμοποιήσουμε την πρώτη μορφή για τη λύση, $Q(t) = e^{-\frac{R}{2L}t}(C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t)$, προκύπτει $C_1 = Q_0$, $C_2 = \frac{R}{2L\omega}Q_0$, δηλαδή καταλήγουμε στο ίδιο αποτέλεσμα. Παρατηρείστε ότι αν παραγωγίσουμε ως προς χρόνο τη ΔΕ που πήραμε από τον κανόνα Kirchhoff, θα έχουμε μια αντίστοιχη ΔΕ δεύτερης τάξης για το ρεύμα,

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC}I = 0$$

Η γενική λύση θα είναι της μορφής

$$I(t) = e^{-\frac{R}{2L}t}(A\cos\omega t + B\sin\omega t) = I_0 e^{-\frac{R}{2L}t}\sin(\omega t + \varphi),$$

δηλαδή το ρεύμα είναι ημιτονοειδές με πλάτος που φθίνει εκθετικά με το χρόνο.

Συνοψίζουμε όσα γνωρίσαμε για μια ομογενή γραμμική ΔΕ δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές,

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0. \tag{5.4.2}$$

Αν οι ρίζες ρ_1 και ρ_2 του χαρακτηριστικού πολυωνύμου είναι πραγματικές και άνισες, τότε η γενική λύση της (5.4.2) είναι

$$x(t) = C_1 e^{\rho_1 t} + C_2 e^{\rho_2 t}.$$

Αν οι ρίζες είναι μιγαδικές $\rho_{1,2} = \lambda \pm i\omega$, τότε η γενική λύση γράφεται

$$x(t) = e^{\lambda t}\left(C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}\right),$$

ή

$$x(t) = e^{\lambda t}(A\cos\omega t + B\sin\omega t),$$

ή

$$x(t) = x_0 e^{\lambda t}\sin(\omega t + \phi).$$

Τέλος, στην περίπτωση ίσων ριζών $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, η γενική λύση γράφεται

$$x(t) = (C_1 + C_2 t)\, e^{\rho t}.$$

Ασκήσεις. 1. Βρείτε μια λύση της εξίσωσης $\ddot{x} + \dot{x} - 2x = 0$, $x(0) = 3$ που δεν τείνει στο άπειρο όταν $t \to \infty$.

2. Λύστε τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις και σχεδιάστε τις λύσεις

$$\ddot{x} + 2\dot{x} = 0,\ x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0, \quad \ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = 0, x(0) = 2, \dot{x}(0) = 0,$$

$$\ddot{x} + 4x = 0,\ \ddot{x} - 4x = 0\ \ \ddot{x} + 0.2\dot{x} + 1.01x = 0,\ \ddot{x} - 0.2\dot{x} + 1.01x = 0.$$

3. Λύστε τα προβλήματα αρχικών τιμών και κάνετε γράφημα των λύσεων

$$\dot{x} = rx\left(1 - x/k\right), \quad r, k > 0, \qquad x\left(0\right) = k/3$$

$$\ddot{x} + 3\dot{x} + 6.25x = 0, \qquad x\left(0\right) = 2, \quad \dot{x}\left(0\right) = 0$$

4. Βρείτε συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν οι παράμετροι ώστε η ΔΕ

$$\ddot{x} + 2a\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

να περιγράφει φθίνουσα ταλάντωση.

5. Να λυθεί η ΔΕ

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0, \qquad b^2 < \frac{4k}{m}$$

Τι παριστάνουν οι (θετικές) παράμετροι m, b, k?

6. Για την χημική αντίδραση $X + Y \to Z$, αν c_1 και c_2 είναι οι αρχικές συγκεντρώσεις των αντιδρώντων και $x(t)$ είναι η συγκέντρωση του προϊόντος τη στιγμή t, τότε

$$\frac{dx}{dt} = k\left(c_1 - x\right)\left(c_2 - x\right)$$

όπου k είναι σταθερή. Βρείτε την $x(t)$ και κάνετε το γράφημα της λύσης (προφανώς $x\left(0\right) = 0$).

Κεφάλαιο 6

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Ένα σώμα εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω. Η απομάκρυνση του από το σημείο βολής ως συνάρτηση του χρόνου είναι $y(t) = -5t^2 + 45t + 6$. Ποιό είναι το μέγιστο ύψος που φτάνει;

2. Η απομάκρυνση ενός αντικειμένου από τη θέση ισορροπίας του ($y = 0$) δίνεται ως συνάρτηση του χρόνου από τη σχέση $y(t) = e^{-0.2t}\cos t$. Βρείτε τις μέγιστες απομακρύνσεις πάνω και κάτω από τη θέση $y = 0$.

3. Όταν βήχουμε η τραχεία συστέλλεται. Η ταχύτητα v του εξερχόμενου αέρα εξαρτάται από την ακτίνα r της τραχείας. Αν R είναι η κανονική (εν ηρεμία) ακτίνα της, τότε για $r \leq R$, η ταχύτητα δίνεται από την $v(r) = a(R - r)r^2$, όπου a θετική σταθερά. Για ποια τιμή της ακτίνας η ταχύτητα γίνεται μέγιστη;

4. Βρείτε τις διαστάσεις ενός κυλινδρικού κουτιού από αλουμίνιο, όγκου $500\mathrm{cm}^3$, που χρησιμοποιεί το ελάχιστο υλικό (αλουμίνιο).

5. Η πυκνότητα του αέρα ρ, ως συνάρτηση του ύψους h δίνεται από τη σχέση

$$\rho(h) = 1.28e^{-0.000124h}(\mathrm{kg}/\mathrm{m}^3).$$

Βρείτε τη μάζα μιας στήλης αέρα διαμέτρου 2m και ύψους 25km.

6. Η πληθυσμιακή πυκνότητα (κάτοικοι/km^2) μιας πόλης δυο εκατομ. κατοίκων, ελαττώνεται εκθετικά από το κέντρο προς την περιφέρεια σύμφωνα με το νόμο $p(r) = 800e^{-ar}$, όπου r η απόσταση από το κέντρο. Προσδιορίστε τη σταθερά $a > 0$ υποθέτοντας ότι η πόλη εκτείνεται σε άπειρη απόσταση.

7. Υπενθυμίζουμε ότι η υδροστατική πίεση σε βάθος h δίνεται από τη σχέση $p = \rho g h$, όπου ρ είναι η πυκνότητα του υγρού. Υπολογίστε τη δύναμη που δέχονται τα πλευρικά τοιχώματα μιας πισίνας διαστάσεων $4 \times 12 \times 3$ γεμάτης με νερό.

8. Η δύναμη F μεταξύ δυο φορτίων δίνεται από το νόμο του Coulomb, άρα εξαρτάται

από την απόσταση r των φορτίων. Όταν το ένα φορτίο απομακρύνεται από το άλλο κατά Δr, το στοιχειώδες έργο της δύναμης είναι $F(r)\Delta r$. Το άθροισμα Riemann των στοιχειωδών έργων μας δίνει το έργο για μια πεπερασμένη μετακίνηση. Βρείτε το έργο της δύναμης Coulomb όταν το ένα φορτίο μετακινείται από απόσταση r_1 σε απόσταση r_2 από το άλλο φορτίο.

9. Υπολογίστε τον όγκο σφαίρας ακτίνας R. (Υποδ. Χωρίστε το ημισφαίριο σε φέτες πάχους Δh, παράλληλες προς τη βάση, και "αθροίστε" τους όγκους τους).

6.1 Υπολογισμός εμβαδών

Το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ των γραφημάτων των συναρτήσεων f και g και των ευθειών $x = a,\ x = b$, δίνεται από τον τύπο

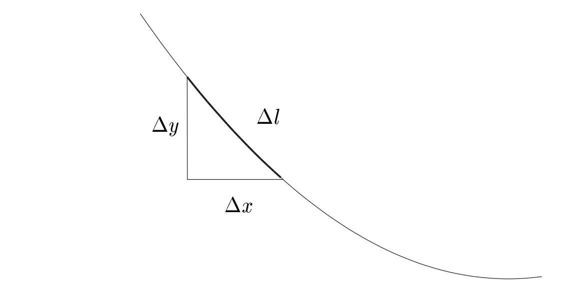
$$A = \int_a^b |f - g|,$$

(κάνετε σχήμα).

- Υπολογίστε τα εμβαδά: (α) Μεταξύ της $f(x) = x^3$ και της εφαπτομένης της στο 1, από τη θέση $x = 1$ μέχρι τη θέση $x = 2$. (β) Μεταξύ της παραβολής $y = 4x - x^2$ και του άξονα x.

- Υπολογίστε το εμβαδόν κύκλου ακτίνας a. (Υποδ. $y^2 + x^2 = a^2$).

6.2 Μήκος καμπύλης



Το μήκος μιας καμπύλης $y = f(x),\quad a \leq x \leq b$, υπολογίζεται ως εξής: Το στοιχειώδες μήκος Δl στο σχήμα δίνεται προσεγγιστικά

$$\Delta l \simeq \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \simeq \sqrt{\Delta x^2 + (f'(x)\,\Delta x)^2} = \Delta x\sqrt{1 + [f'(x)]^2}.$$

Το άθροισμα των στοιχειωδών αυτών μηκών είναι κατά προσέγγιση το μήκος της καμπύλης. Σχηματίζοντας το άθροισμα Riemann, θα καταλήξουμε στον τύπο

$$\text{Μήκος καμπύλης} = L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

- Υπολογίστε το μήκος της αλυσοειδούς καμπύλης

$$y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

μεταξύ $x = -1$ και $x = 1$ (είναι το σχήμα που παίρνει μια αλυσίδα ή ένα καλώδιο που κρέμεται από δυο πύργους).

- Υπολογίστε τα μήκη των καμπυλών: (α) $y = \ln x$, $1 \leq x \leq e$ (β) $y = \ln\cos x$, $0 \leq x \leq \pi/6$.

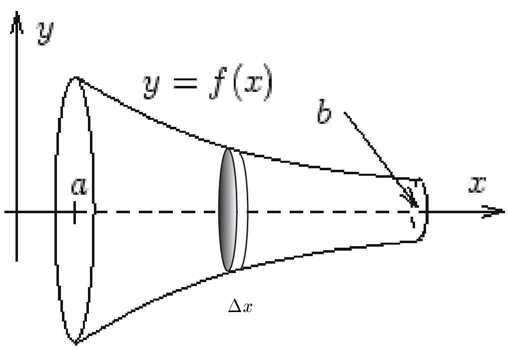
Θεωρούμε τώρα μια παραμετρική παράσταση μιας καμπύλης, δηλαδή ένα ζεύγος παραγωγίσιμων συναρτήσεων $x(t)$, $y(t)$ με $t \in [a, b]$. Επειδή $dx = \dot{x}(t)dt$ και $dy = \dot{y}(t)dt$, το μήκος της καμπύλης θα δίνεται από τον τύπο

$$L = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt.$$

- Ελέγξετε τον τύπο υπολογίζοντας το μήκος του κύκλου $x(t) = r\cos t$, $y(t) = r\sin t$, $t \in [0, 2p]$.

- Υπολογίστε τα μήκη των καμπυλών: (α) Κυκλοειδούς, με $x(t) = a(t - \sin t), y(t) = a(t - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$. (β) $x(t) = \cos^3 t$, $y(t) = \sin^3 t$, $t \in [0, 2\pi]$. (γ) $x(t) = t - \tanh t$, $y(t) = 1/\cosh t$, $t \in [-\ln 2, \ln 2]$.

6.3 Όγκος και επιφάνεια από περιστροφή



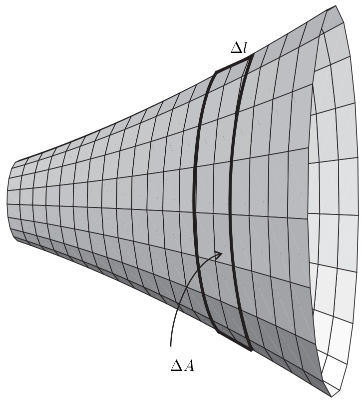
Αν η καμπύλη $y = f(x)$, $a < x < b$, περιστραφεί γύρω από τον άξονα x, τότε ο όγκος του στερεού που σχηματίζεται υπολογίζεται αν "αθροίσουμε" τους στοιχειώδεις όγκους του σχήματος. Κάθε φέτα έχει ακτίνα y και πάχος Δx.

Σχηματίστε ένα κατάλληλο άθροισμα Riemann. Θα πρέπει να καταλήξετε στον τύπο

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx.$$

Για κινούμενα γραφικά, http://curvebank.calstatela.edu/volrev/volrev.htm

- Υπολογίστε τον όγκο από περιστροφή γύρω από τον άξονα x των καμπυλών $y = (\tan\theta)\, x$, όπου θ σταθερή γωνία, $0 < x < a$, (κώνος) και $y = e^{-x}$, $0 < x < 1$. Υπολογίστε τον όγκο σφαίρας.



Καθώς η καμπύλη $y = f(x)$ περιστρέφεται γύρω από τον άξονα x, διαγράφει μια επιφάνεια εμβαδού A. Το στοιχειώδες εμβαδόν είναι $\Delta A \simeq 2\pi f(x)\Delta l$, όπου φυσικά $\Delta l \simeq \Delta x\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$. Άρα το εμβαδόν της επιφάνειας δίνεται από τον τύπο

$$A = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, dx$$

Αν η καμπύλη δίνεται παραμετρικά, τότε

$$A = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} |y(t)| \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} \, dt.$$

Ως εφαρμογή, ας περιστρέψουμε κατά 2π περί τον άξονα x, το ημικύκλιο που δίνεται παραμετρικά από $x(t) = a\cos t$, $y(t) = a\sin t$, $t \in [0, \pi]$ (κάνετε σχήμα). Το εμβαδόν της σφαίρας που σχηματίζεται είναι

$$2\pi \int_0^\pi a\sin t\sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t} \, dt = 2\pi \int_0^\pi a^2 \sin t dt = 4\pi a^2.$$

- Υπολογίστετον όγκο και την επιφάνεια του ελλειψοειδούς που σχηματίζεται από περιστροφή περί τον άξονα x της ημιέλλειψης $x(t) = a\cos t$, $y(t) = b\sin t$, $t \in [0, \pi]$.

6.4 Το ορισμένο ολοκλήρωμα ως μέση τιμή

Για ένα μέγεθος f που εξαρτάται από το χρόνο, ορίζουμε ως μέση τιμή του στο χρονικό διάστημα $[0, T]$

$$\langle f \rangle_T = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\, dt.$$

Ως εφαρμογή ας υπολογίσουμε τη μέση ισχύ που καταναλώνεται σε χρόνο μιας περιόδου πάνω σε αντίσταση που διαρρέεται από εναλλασσόμενο ρεύμα. Η ισχύς γράφεται $P(t) = RI_0^2 \sin^2 \omega t$, άρα

$$\langle P \rangle_T = \frac{1}{T} \int_0^T P(t)\, dt = \frac{\omega R I_0^2}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \sin^2 \omega t dt = \frac{RI_0^2}{2},$$

και αν γράψουμε $\langle P \rangle_T = I_{\text{rms}}^2 R$, προκύπτει η γνωστή σχέση μεταξύ ενεργού τιμής και πλάτους,

$$I_{\text{rms}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}.$$

- Βρείτε τη μέση τιμή των συναρτήσεων με τύπο

  $$\sin t,\ \cos t,\ \sin 2t,\ \sin^2 t,\ \cos^2 \omega t, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

  Υπάρχει σε κάθε περίπτωση κατάλληλο ξ στο $[0, 2\pi]$, τέτοιο ώστε να ισχύει $f(\xi) =$ μέση τιμή;

6.5 Ελλειπτικό ολοκλήρωμα

Το μήκος της έλλειψης με παραμετρική αναπαράσταση

$$x(t) = a \cos t,\ y(t) = b \sin t, \qquad b > a$$

δίνεται ως γνωστόν από τον τύπο

$$l = 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\ dt = 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}\ dt.$$

Το ολοκλήρωμα μετασχηματίζεται στο

$$l = 4b \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{b^2 - a^2}{b^2} \sin^2 t}\ dt.$$

Το *ελλειπτικό ολοκλήρωμα*

$$E(k, \pi/2) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}\ dt, \qquad 0 < k < 1$$

δεν υπολογίζεται αναλυτικά, αλλά ασυμπτωτικά δίνεται από την σχέση

$$E(k, \pi/2) = \frac{\pi}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^2 k^2 - \left(\frac{1.3}{2.4} \right)^2 \frac{k^4}{3} - \left(\frac{1.3.5}{2.4.6} \right)^2 \frac{k^6}{5} - ... \right].$$

- Υπολογίστε με ακρίβεια 4 δεκαδικών ψηφίων το μήκος έλλειψης με ημιάξονες $a = 3$ και $b = 4$.

- Υπολογίστε το μήκος της τροχιάς της γης περί τον ήλιο θεωρώντας ότι είναι κύκλος ακτίνας ίσης με το αφήλιο. Στη συνέχεια λάβετε υπ΄ όψιν ότι η εκκεντρότητα της γης είναι $e = 0.0167$ (βλ. σχετικό άρθρο στην Wikipedia) και υπολογίστε το μήκος της ελλειπτικής τροχιάς. Πόσο είναι το επί τοις εκατό σφάλμα;